Systèmes de coordonnées relativistes

Rommel Nana Dutchou

rommel.nana.dutchou@gmail.com

Relativistic coordinate systems

Abstract

This theory proposes an extension of the Poincare group for the description of space-time transformations between two frames of reference. It is designed to study the question to know what eucludean frames of reference can use Coulomb's law to represent the influence of a stationary electric charge indivisible on the trajectory of any other electrically charged particle. The three-dimensional geometry of Lorentz transformation is presented as a modification of the inner product of the euclidean physical space, a concept of coulombean frames of reference is introduced, it appears new equations governing the propagation of electromagnetic fields and the laws of motion show a gravitational interaction between elementary particles.

Résumé

Cette théorie propose une extension du groupe de Poincaré pour la description des transformations des coordonnées d'espace et de temps entres deux quelconques référentiels. Elle est conçue pour étudier la question de savoir quels référentiels euclidiens peuvent utiliser la loi de Coulomb pour représenter l'influence d'une charge électrique immobile sur la trajectoire de toute autre particule électriquement chargée. La géométrie tridimensionnelle de la transformation de Lorentz est présentée comme une modification du produit scalaire définissant l'espace physique euclidien, une notion de référentiel coulombien est introduite, il apparaît de nouvelles équations qui régissent la propagation des champs électromagnétiques et le principe fondamental de la dynamique met en évidence une interaction de nature gravitationnelle entres les particules élémentaires.

Table des matières

1 Introduction 2
2 Notions d'espace et de temps 3
3 La physique classique 5
3.1 Une approche originale de la cinématique non relativiste 5
3.1.1 Précision des hypothèses intuitives 5
3.1.2 Transformation des coordonnées d'espace et de temps 7
3.2 Les lois de la dynamique 8
3.2.1 Les deux premières lois de Newton 8
3.2.2 La gravitation 8
3.2.3 L'électromagnétisme 8
3.3 Incohérence de la représentation des interactions 9
4 La transformation de Lorentz 9
4.1 Une présentation originale des équations de Maxwell 9
4.2 Le groupe de Poincaré 10
4.3 Quelques propriétés 11
4.3.1 Repères d'espace superposables 11
4.3.2 Flexibilité du temps d'un référentiel en mouvement 11
4.3.3 Flexibilité de l'espace d'un référentiel en mouvement 12
4.3.4 Géométries distinctes 12
5 Application de la formule de Lorentz : L'électromagnétisme 13

5.1 Relation fondamentale de la dynamique . . . 13
5.1.1 Notion de Contrainte . . . 13
5.1.2 La force de Lorentz . . . 14
5.1.3 Relation fondamentale de la dynamique . . . 14
5.2 Champs associés à une charge en translation uniforme . . . 16
5.2.1 La force électromagnétique . . . 16
5.2.2 Les équations du champ électromagnétique . . . 16
6 Les transformations admissibles . . . 17
6.1 Les transformations réellement admissibles . . . 17
6.2 Le groupe des transformations admissibles . . . 18
6.3 Équations caractéristiques . . . 19
6.4 Matrice différentielle . . . 22
6.5 Notion de d'observateur . . . 24
7 Géométrie d'un espace-temps en mouvement . . . 25
7.1 Dynamique d'un référentiel en mouvement . . . 25
7.2 Mouvement dans $\mathcal{R}$ d'un élément de $\mathcal{E}_{r'}$ . . . 26
7.3 Géométrie des droites en mouvement . . . 26
8 Réalisation d'un référentiel . . . 27
8.1 Approche naïve . . . 27
8.2 Concept d'immobilité . . . 28
8.3 Un principe variationnel . . . 30
9 Interaction entre deux particules élémentaires chargées . . . 30
10 Conclusion . . . 31

1 Introduction

La charge électrique est une propriété de la matière qui lui permet d'influencer la trajectoire de toute autre entité similaire se trouvant dans son voisinage. Elle existe sous deux catégories et l'interaction entre deux matières porteuses est répulsive si elles sont de même nature et attractive sinon. Les phénomènes électrostatiques mettent en évidence le fait que les particules électriquement chargées coexistent de façon stable au sein de la matière et on pense alors que cette dernière est constituée d'entités indivisibles dites élémentaires, dont les interactions sont plus ou moins complexes et réalisées de sorte à assurer la stabilité de l'édifice.

Si dans un référentiel on suppose que les lois de la physique sont identiques à toutes les dates, en tout point de l'espace et dans toutes ses directions, alors le principe de Curie affirme que l'information [1] générée par une distribution stationnaire de charges électriques présentant une symétrie sphérique est elle même à symétrie sphérique et indépendante du temps, et la formule expérimentale de Coulomb signifie qu'à l'extérieur d'une telle distribution le champ décroit toujours [2] en $\frac{1}{r^2}$ quelque soit la quantité de charges immobiles constituant la distribution. Sachant qu'idéalement la charge électrique portée par une particule élémentaire est localisée de façon ponctuelle en son sein [3], il est légitime de se demander : **Quels référentiels peuvent supposer que la loi de Coulomb est mathématiquement exacte pour la description de l'information générée par une particule élémentaire électriquement chargée et immobile ?**

Ces référentiels se distinguent de ceux dits galiléens, reconnaissables par la nature du mouvement des entités qui n'y sont soumisent à aucune contrainte identifiable.

Tous les référentiels ne peuvent constater la même trajectoire pour une particule élémentaire désignée et cette évidence semble indiquer qu'ils ne peuvent s'accorder sur la nature de la trajectoire d'un corps libre. Leur équivalence pour l'énoncé des lois de physique serait donc impossible, à moins que la notion de *corps libre* ne soit relative et que les natures des mouvements des particules élémentaires auxquelles sont rattachés les référentiels ne leurs confèrent une propriété interactive permettant de justifier l'apparition ou la modification des contraintes lors

1. Cette information pertube la trajectoire de toute charge électrique qui y est exposée.
2. C'est l'unique champ radiale à divergence nulle.
3. Il n'est pas nécessaire de faire une hypothèse sur sa géométrie qui peut être quelconque.

d'un changement d'observateur. Cette logique est nécessaire pour que tous les référentiels soient Coulombiens.

Un référentiel coulombien définit avec précision l'action de l'information générée par une certaine source électrique statique sur toute autre particule dans le même état mais n'explique pas comment cette information pertube une quelconque trajectoire qui y est exposée. La relation fondamentale de la dynamique, identique par définition à la deuxième loi de Newton dans une configuration spéciale, sera présentée comme un fait expérimental au même titre que l'expression classique de la force électromagnétique qu'on pourra alors démontrer.

Afin de ne pas s'égarer au cours de notre étude, on définira au préalable les notions d'espace et de temps sous forme axiomatique. C'est un travail fortement inspiré des réflexions menées dans [1] et [2]. Considérons deux physiciens $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ qui sont chacun à bord d'un véhicule spatial disposant d'une horloge numérique arbitrairement initialisée. Pour l'un ou lautre, un repère d'espace est une application [4] qui à chaque date indiquée par son horloge associe des coordonnées ou des positions aux différentes entités. Il ne semble pas trivial de préciser par quel procédé $\mathcal{P}$ ou $\mathcal{P}'$ détermine les distances spatiales [5] et temporelles qui séparent deux phénomènes mais il sait que ces nombres existent car il peut certainement constater la succession des dates indiquées par son horloge et les mouvements plus ou moins intenses de différentes entités. Les assertions suivantes ont alors un sens pour un quelconque phénomène :

(a) Pour le physicien $\mathcal{P}$, le phénomène s'est produit à une date t indiquée par son horloge et en un point M de l'espace, le point M étant éloigné d'une distance d et situé dans une direction $\vec{e}$. Le phénomène est entièrement identifié par le triplet $(t, d, \vec{e})$.

(b) Pour le physicien $\mathcal{P}'$, le phénomène s'est produit à une date t' indiquée par son horloge et en un point M' de l'espace, le point M' étant éloigné d'une distance d' et situé dans une direction $\vec{e}'$. Le phénomène est entièrement identifié par le triplet $(t', d', \vec{e}')$.

La transformation de l'espace et du temps entre $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ est décrite par l'application

$$\psi_{p,p'} : (t, d, \vec{e}) \longmapsto (t', d', \vec{e}') \tag{1}$$

Les antécédents sont éléments de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \times \mathcal{V}_\mathcal{P}$ et les images éléments de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \times \mathcal{V}_{\mathcal{P}'}$. Fondamentalement, l'ensemble $\mathcal{V}_\mathcal{P}$ n'est muni que d'une relation de colinéarité et sa structure ne peut être étendue à celle d'un espace vectoriel que lorsqu'on lui associe une addition conçue à partir de la relation de Chasles. Dans le but d'établir toutes les conséquences de cette hypothèse, on supposera que pour chacun l'espace physique est euclidien et de dimension trois.

La physique classique suppose qu'on peut confondre $\mathcal{V}_\mathcal{P}$ et $\mathcal{V}_{\mathcal{P}'}$ et décrire l'application $\psi_{p,p'}$ comme étant l'identité. Dans ces conditions l'aspect qualitatif de la loi de Biot et Savart, qui est mis en évidence par le théorème d'Ampère, indique qu'il ne peut exister qu'un unique référentiel coulombien. On montrera, et c'est un résultat établit par la théorie de la relativité restreinte, qu'il est possible de mettre en évidence toute une classe de référentiels coulombiens en translation uniforme les uns par rapport aux autres si $\psi_{p,p'}$ se déduit de la formule spéciale de Lorentz dès que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont deux de ses éléments. On pourra alors calculer avec précision les propriétés interactives d'une particule élémentaire électriquement chargée et dont le mouvement par rapport à $\mathcal{P}$ est rectiligne et uniforme. Si on souhaite supposer que tous les référentiels sont coulombiens, il est nécessaire d'admettre que $\psi_{p,p'}$ est une transformation admissible lorsque $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont quelconques.

2 Notions d'espace et de temps

Un référentiel est l'association d'une notion d'immobilité des entités et d'une notion de simultanéité entre les phénomènes. C'est un concept indispensable [6] pour la description des mouve-

4. Artificiellement, si l'ensemble de départ est l'univers tout entier couplé à l'ensemble des dates indiquées par son horloge, l'ensemble des coordonnées peut être noté $\mathbb{R}^3 \cup \{\emptyset\}$ et à chaque date la distance spatiale entre deux quelconques entités est une certaine fonction de leurs coordonnées.

5. L'existence d'une vitesse limite permettra d'affirmer que relativement a un quelconque référentiel, la distance spatiale entre deux entités immobiles est directement proportionnelle à la durée minimale nécessaire pour qu'une information qui émane de l'une d'entre elle parvienne à l'autre, la constante de proportionalité n'étant fonction que du choix des étalons.

6. La notion de trajectoire d'une entité n'a de sens que par rapport à un référentiel et il est possible d'y rechercher ses vecteurs vitesses et accélérations qui sont uniquement déterminés.

ments des entités et en son sein, une durée existe entre deux classes d'évènements simultanés et une distance spatiale existe entre deux entités immobiles. Par ailleurs, une particule élémentaire qui suit une certaine trajectoire [7] dans le référentiel où elle est étudiée est supposée être une entité de même nature dans tout autre référentiel.

Postulat 1. *(Le continuum espace-temps) L'univers $\mathcal{U}$, ensemble de tous les évènements, est un espace topologique homéomorphe à $\mathbb{R}^4$. Un système de coordonnées spatio-temporelles est un homéomorphisme défini sur $\mathcal{U}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^4$.*

Postulat 2. *(Notion de référentiel) La simultanéité entre les phénomènes et l'immobilité des entités sont les concepts fondamentaux de la physique auxquels tout référentiel peut donner un sens. Un référentiel est un ensemble de systèmes de coordonnées tels que toute entité immobile pour l'un le soit pour l'autre.*

Postulat 3. *(C'est une représentation suffisante) Relativement à un quelconque référentiel, la simultanéité entre les évènements est une relation d'équivalence et l'ensemble des classes d'équivalence est ordonné et muni de la topologie engendrée par les intervalles ouverts. L'espace physique, dont chacun des points est identifiable à un point matériel immobile, est un espace affine réel de dimension trois.*

Postulat 4. *(Les distances spatiales et temporelles) Tout référentiel $\mathcal{R}$ est muni d'un produit scalaire $<,>_r$ sur l'espace vectoriel direction de l'espace physique et d'une mesure à variations continues ς_r sur l'ensemble des classes d'équivalence de simultanéité, et ces applications sont uniquement déterminées à des constantes positives multiplicatives près caractérisant les choix des étalons.*

Postulat 5. *(Notion de trajectoire) Si un ensemble d'évènements décrit dans un référentiel $\mathcal{R}$ une trajectoire, c'est à dire que l'ensemble des classes de simultanéité dont ils sont éléments forment un intervalle ouvert de la droite réelle et à chacune d'elles est associé un point de l'espace à travers une fonction dérivable au second ordre, alors cet ensemble décrit une trajectoire dans tout autre référentiel $\mathcal{R}'$.*

Postulat 6. *(Principe de conservation des dimensions) Si quatres points matériels ne sont coplanaires à aucune date dans un référentiel $\mathcal{R}$, alors ils paraissent dans la même configuration dans tout autre référentiel $\mathcal{R}'$.*

Parce qu'elles sont profondément liées au concept d'immobilité, les notions de mouvement, d'espace et de coordonnées spatiales n'ont de sens que relativement à une entité supposée à l'instar d'une particule élémentaire qui est alors parfaitement identifiable et assimilable [8] à une horloge. $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ étant deux référentiels, parce que la simultanéité peut être une notion relative, le postulat 3 permet de distinguer leurs variables temporelles et les directions de leurs espaces physiques. Le postulat 1 met en évidence une relation entre leurs variables spatiales et temporelles et le postulat 5, qui donne une information sur la structure des transformations entre les systèmes de coordonnées, signifie qu'un point de l'espace $\mathcal{E}_{r'}$ de $\mathcal{R}'$ est décrit dans $\mathcal{R}$ par une trajectoire. On peut alors noter $\mathcal{E}_{r'} = \mathcal{E}_r{}^{\mathbb{R}}$ et prédire l'existence d'une application $\phi(\mathcal{R}', \mathcal{R})$, définie sur $\mathcal{U}$ et à valeurs dans $\mathcal{V}_r$ direction de l'espace physique de $\mathcal{R}$, qui associe à l'évènement δ le vecteur vitesse dans $\mathcal{R}$ et en δ d'un point matériel continûment immobile dans $\mathcal{R}'$.

Si M' et N' sont éléments de $\mathcal{E}_{r'}$, on peut noter $M'(t)$ et $N'(t)$ les positions qu'ils occupent dans $\mathcal{R}$ à la date t et $\varphi_r\left(M'(t), N'(t)\right)$ l'élément de $\mathcal{V}_r$ qu'ils définissent. Un système de coordonnées de $\mathcal{R}$ est cartésien si les coordonnées spatiales et temporelles sont cartésiennes c'est-à-dire qu'il existe un élément O de $\mathcal{E}_r$ et une base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{V}_r$ tels que les coordonnées spatiales d'un quelconque élément M de $\mathcal{E}_r$ soient les composantes dans $\mathcal{B}$ de $\varphi_r\left(O, M\right)$, et si t_a et t_b sont les dates associées aux classes de simultanéité a et b tels que a précède b alors

$$t_b = t_a + \epsilon_r \varsigma_r(]a, b[) \tag{2}$$

ϵ_r étant élément de $\{-1, +1\}$ et décrivant le choix du signe fait par $\mathcal{R}$ pour caractériser la succession des instants.

7. Cela peut être celle de son centre de symétrie lorsqu'elle est immobile.
8. C'est le véhicule spatial évoqué à l'introduction.

La mesure ς_r est à variations continues si quelques soient les élements A et B de son ensemble de départ vérifiant

$$A \subset B \qquad \varsigma_r(A) < \varsigma_r(B)$$

il existe un élément C tel que

$$A \subset C \subset B \qquad \varsigma_r(A) < \varsigma_r(C) < \varsigma_r(B)$$

3 La physique classique

3.1 Une approche originale de la cinématique non relativiste

3.1.1 Précision des hypothèses intuitives

Comme les postulats qui précèdent, les hypothèses suivantes sont admisent de façon intuitives en physique classique.

Hypothèse 1. *(Rigidité apparente des référentiels) $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ étant quelconques, D_r étant la distance définie sur le référentiel $\mathcal{R}$, quelques soient (M', N') élément de $\mathcal{E}_r \times \mathcal{E}_r$, quelques soient les réels t_1 et t_2, λ caractérisant les choix des étalons des longueurs,*

$$\lambda D_r\left(M'(t_2), N'(t_2)\right) = \lambda D_r\left(M'(t_1), N'(t_1)\right) = D_{r'}\left(M', N'\right) \tag{3}$$

Cette hypothèse permet de préciser l'application $\phi(\mathcal{R}', \mathcal{R})$. En effet, on peut munir $\mathcal{R}$ d'un système de coordonnées cartésien S qui est relatif à une base orthonormée $\mathcal{B}_s$ de $\mathcal{V}_r$ et à une origine O_s élément de $\mathcal{E}_r$, et considérer l'application $g^s_{t_0,t}$ définie sur $\mathbb{R}^3$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^3$, qui associe aux coordonnées de $M'(t_0)$ dans S les coordonnées de $M'(t)$. Si on note $\|.\|$ la norme sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ issue du produit scalaire canonique $<,>$, alors la première égalité de la relation précédente s'écrit

$$\|g^s_{t_0,t}(\alpha + h) - g^s_{t_0,t}(\alpha)\| = \|h\| \quad \forall(\alpha, h) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$$

η étant une variable réelle,

$$\|g^s_{t_0,t}(\alpha + \eta h) - g^s_{t_0,t}(\alpha)\| = |\eta|\|h\|$$

Par ailleurs, si on suppose $g^s_{t_0,t}$ partout différentiable et si on note $a_{t_0,t}(\alpha)$ sa matrice différentielle en α,

$$\begin{aligned} \lim_{\eta \to 0} \frac{1}{\eta}\left(g^s_{t_0,t}(\alpha + \eta h) - g^s_{t_0,t}(\alpha)\right) &= a_{t_0,t}(\alpha)h \\ \lim_{\eta \to 0} \|\frac{1}{\eta}\left(g^s_{t_0,t}(\alpha + \eta h) - g^s_{t_0,t}(\alpha)\right)\| &= \|a_{t_0,t}(\alpha)h\| \end{aligned}$$

Il résulte que $a_{t_0,t}(\alpha)$ est une matrice orthogonale. Si $\|h\| \neq 0$, l'application

$$\alpha \longmapsto a_{t_0,t}(\alpha)h$$

est définie sur $\mathbb{R}^3$ et prend ses valeurs sur une sphère de rayon $\|h\|$ qu'on peut noter $]0, \pi[\times]0, 2\pi[$. L'ensemble d'arrivée étant strictement inclus dans l'ensemble de départ, elle ne peut être injective et on admettra que toute solution $g^s_{t_0,t}$ est à différentielle constante. Par conséquent, si $g_{t_0,t}$ est l'application définie sur $\mathcal{E}_r$ qui associe au point de coordonnées α dans S celui de coordonnées $g^s_{t_0,t}(\alpha)$, alors elle est la composée d'une translation de vecteur $\vec{l}_{t_0,t}$ et d'une isométrie vectorielle $A_{t_0,t}$ dont la matrice représentative dans la base $\mathcal{B}_s$ est $a_{t_0,t}$. Dans $\mathcal{R}$, la vitesse moyenne de M' entre les dates t et $t + \delta t$ est

$$\frac{1}{\delta t} \times \left(A_{t_0,t+\delta t} - A_{t_0,t}\right)\varphi_r\left(O_s, M'(t_0)\right) + \frac{1}{\delta t} \times \left(\vec{l}_{t_0,t+\delta t} - \vec{l}_{t_0,t}\right)$$

I étant la matrice identité, celle qui représente $A_{t_0,t+\delta t} - A_{t_0,t}$ est

$$a_{t_0,t+\delta t} - a_{t_0,t} = (a_{t,t+\delta t} - I) \circ a_{t_0,t} = \delta t \times b_{t,t+\delta t} \circ a_{t_0,t}$$

Il résulte du postulat 5 que les coefficients de $a_{t_0,t}$ et les composantes de $\vec{l}_{t_0,t}$ sont des fonctions dérivables par rapport à la variable t et on peut noter

$$b_{t,t} = \lim_{\delta t \to 0} b_{t,t+\delta t} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{1}{\delta t} \left(a_{t,t+\delta t} - I\right)$$

On sait alors que $b_{t,t}$ est une matrice antisymétrique par conséquent il existe un couple

$$(\vec{w}(t), \vec{v}(t)) \in (\mathcal{V}_r)^2$$

tel que le vecteur vitesse de M' à la date t soit

$$\frac{d}{dt}\varphi_r\left(O_s, M'(t)\right) = \vec{w}(t) \wedge \varphi_r\left(O_s, M'(t)\right) + \vec{v}(t) \tag{4}$$

$\wedge$ étant le produit vectoriel relatif à $\mathcal{B}_s$.

On note O_r le point de l'espace du référentiel $\mathcal{R}$ où est immobile la particule élémentaire à laquelle il est rattaché. Si $\mathcal{R}'$ est également muni d'un repère d'espace cartésien et s'il est rattaché à une particule élémentaire qui y est immobile au point $O_{r'}$, alors la précision de la transformation des coordonnées d'espace et de temps entre $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ nécessite la mise en évidence de l'application

$$\psi_{r,r'} : (t, \varphi_r(O_r, M'(t))) \longmapsto (t', \varphi_{r'}(O_{r'}, M'))$$

Les antécédents étant éléments de $\mathbb{R}\times\mathcal{V}_r$ et les images éléments de $\mathbb{R}\times\mathcal{V}_{r'}$. Un espace vectoriel est une structure stable par combinaison linéaire et la nature de ses éléments n'a aucune importance puisqu'il est reconnu par les correspondances qui sont réalisées par les opérations dont il est muni. En ce sens, un unique ensemble pourrait être le support de plusieurs espaces vectoriels lorsqu'on lui associe différentes opérations.

Définition 3.1. *La structure affine du référentiel $\mathcal{R}'$ est l'application $\mathcal{T}_{r'}$ qui est définie par la relation*

$$\varphi_{r'}\left(O_{r'}, \mathcal{T}_{r'}(\alpha, \beta, M', N')\right) = \alpha\varphi_{r'}(O_{r'}, M') + \beta\varphi_{r'}(O_{r'}, N')$$

Les antécédents étant éléments de $\mathbb{R}^2\times{\mathcal{E}_{r'}}^2$ et les images éléments de $\mathcal{E}_{r'}$. La structure vectorielle induite sur $\mathcal{V}_{r'}$ est l'application $\tilde{\mathcal{T}}_{r'}$ définie par la relation

$$\tilde{\mathcal{T}}_{r'}\left(\alpha, \beta, \vec{u}', \vec{v}'\right) = \alpha\vec{u}' + \beta\vec{v}'$$

Les antécédents étant éléments de $\mathbb{R}^2 \times {\mathcal{V}_{r'}}^2$ et les images éléments de $\mathcal{V}_{r'}$.

Définition 3.2. *La dynamique du référentiel $\mathcal{R}'$ dans $\mathcal{R}$, qui est une suite de structures affines sur $\mathcal{E}_r$ non nécessairement identiques à la structure affine de $\mathcal{R}$, est l'application $\mathcal{D}_{r,r'}$ définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans ${\mathcal{E}_r}^{\mathbb{R}^2\times{\mathcal{E}_r}^2}$ par les relations, la première étant une notation,*

$$\mathcal{D}_{r,r'}(t) = \mathcal{D}^t_{r,r'} \qquad \mathcal{D}^t_{r,r'}(\alpha, \beta, M'(t), N'(t)) = \mathcal{T}_{r'}(\alpha, \beta, M', N')(t)$$

La structure affine de $\mathcal{R}$ translatée au point O est $\mathcal{T}^O_r$ définie par

$$\varphi_r\left(O, \mathcal{T}^O_r(\alpha, \beta, M, N)\right) = \alpha\varphi_r(O, M) + \beta\varphi_r(O, N)$$

Hypothèse 2. *(Superposition structurelle des espaces affines) Quelques soient les référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$, quelque soit le réel t,*

$$\mathcal{D}^t_{r,r'} = \mathcal{T}_r^{O_{r'}(t)}$$

Pour expliciter $\psi_{r,r'}$, il ne reste plus qu'à préciser la coordonnée temporelle.

Hypothèse 3. *(Identité des variables temporelles) $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ étant quelconques, les classes d'équivalence définies par la notion de simultanéité entre les évènements dans $\mathcal{R}$ sont identiques à celles définies dans $\mathcal{R}'$ et $\varsigma_{r'}$ s'obtient en multipliant ς_r par une constante strictement positive.*

Ainsi, pour un choix approprié des étalons, les durées séparant deux évènements sont identiques dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$. Il est évident que la relation (3) est transitive lorsqu'on lui associe cette dernière hypothèse par conséquent l'équation (4) a la même structure dans tous les référentiels. Par ailleurs, si elle n'est pas formulée, comparer les variables temporelles de $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ revient à comparer deux partitions distinctes d'un ensemble.

L'originalité de cette approche des changements de référentiels en physique non relativiste, qui met en évidence les conséquences des différentes hypothèses nécessaires, permet de se représenter la différence qui peut exister entre changer de référentiel et utiliser un système de coordonnées en mouvement. Dans cette dernière situation le choix du repère mobile est arbitraire en ce sens qu'il suffit d'imaginer le mouvement des entités qui y ont des coordonnées constantes et sans avoir à supposer une quelconque identité ni à postuler l'hypothèse 1, on n'utilise qu'un espace vectoriel et qu'une notion de simultanéité qui sont propres au référentiel de départ.

3.1.2 Transformation des coordonnées d'espace et de temps

On recherche $\psi_{r',r}$. On peut munir $\mathcal{R}'$ d'un système de coordonnées cartésien S' qui est relatif à une base orthonormée $\mathcal{B}_{s'}$ de $\mathcal{V}_{r'}$ et à une origine $O_{s'}$ élément de $\mathcal{E}_{r'}$. Soient M'_2, M'_3, M'_4 et M' des éléments de $\mathcal{E}_{r'}$ tels que

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_{s'} &= [\varphi_{r'}(O_{r'}, M'_j)]_{2\leq j\leq 4} \\
\varphi_{r'}(O_{r'}, O_{s'}) &= \hat{x}^{s'}_j \ \varphi_{r'}(O_{r'}, M'_j) \\
\varphi_{r'}(O_{r'}, M') &= \hat{x}'_j \ \varphi_{r'}(O_{r'}, M'_j) \\
M' &= \mathcal{T}_{r'}[\hat{x}'_4, 1, M'_4, \mathcal{T}_{r'}(\hat{x}'_2, \hat{x}'_3, M'_2, M'_3)] \\
M'(t) &= \mathcal{D}^t_{r,r'}[\hat{x}'_4, 1, M'_4(t), \mathcal{D}^t_{r,r'}(\hat{x}'_2, \hat{x}'_3, M'_2(t), M'_3(t))]
\end{aligned}$$

Cette dernière égalité ayant lieu quelque soit le réel t. Il résulte de l'hypothèse 2 la relation

$$\begin{aligned}
M'(t) &= \mathcal{T}_r^{O_{r'}(t)}[\hat{x}'_4, 1, M'_4(t), \mathcal{T}_r^{O_{r'}(t)}(\hat{x}'_2, \hat{x}'_3, M'_2(t), M'_3(t))] \\
\varphi_r(O_r(t), M'(t)) &= \hat{x}'_j \ \varphi_r(O_{r'}(t), M'_j(t))
\end{aligned}$$

On sait que, $(i,j) \in \{2,3,4\}$, $i \neq j$,

$$\begin{aligned}
D_{r'}(O_{r'}, M'_i) &= 1 \\
D_{r'}(M'_i, M'_j) &= \sqrt{2}
\end{aligned}$$

Il résulte de l'hypothèse 1 les égalités

$$\begin{aligned}
D_r(O_{r'}(t), M'_i(t)) &= \frac{1}{\lambda} \\
D_r(M'_i(t), M'_j(t)) &= \frac{\sqrt{2}}{\lambda}
\end{aligned}$$

On peut déduire que

$$[\varphi_r(O_{r'}(t), M'_i(t))]_{2\leq i\leq 4}$$

est orthonormée dans $\mathcal{R}$. Si on note $\mathcal{B}_s = (\vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4)$, alors

$$\varphi_r(O_{r'}(t_0), M'_j(t_0)) = b^{t_0}_{kj} \ \vec{u}_k$$

$b^{t_0} = (b^{t_0}_{ij})$ étant une matrice orthogonale. Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
\varphi_r(O_{r'}(t), M'_j(t)) &= A_{t_0,t} \ \varphi_r(O_{r'}(t_0), M'_j(t_0)) \\
< \vec{u}_i, \varphi_r(O_{r'}(t), M'_j(t)) >_r &= (a_{t_0,t})_{ik} \ < \vec{u}_k, \varphi_r(O_{r'}(t_0), M'_j(t_0)) >_r \\
&= (a_{t_0,t} b^{t_0})_{ij} \\
\varphi_r(O_{r'}(t), M'(t)) &= (a_{t_0,t} b^{t_0})_{ij} \hat{x}'_j \ \vec{u}_i \\
\varphi_r(O_s, M'(t)) &= \varphi_r(O_s, O_{r'}(t)) + (a_{t_0,t} b^{t_0})_{ij} \hat{x}'_j \ \vec{u}_i \\
&= \{(a_{t_0,t} b^{t_0})_{ij} \hat{x}'_j + (a_{t_0,t})_{ij} x^{r'}_j(t_0) + l^i_{t_0,t}\} \ \vec{u}_i \\
\varphi_r(O_s, M'(t)) &= \{(a_{t_0,t} b^{t_0})_{ij} (\hat{x}^{s'}_j + x'_j) + (a_{t_0,t})_{ij} x^{r'}_j(t_0) + l^i_{t_0,t}\} \ \vec{u}_i \qquad (5)
\end{aligned}$$

Enfin, le postulat 4 et l'hypothèse 3 permettent d'écrire, si les coordonnées temporelles sont cartésiennes,

$$t' = \lambda \frac{c}{c'} t + \text{Constante} \tag{6}$$

Les équations (5) et (6) permettent de retrouver la loi de transformation des vecteurs vitesses.

3.2 Les lois de la dynamique

3.2.1 Les deux premières lois de Newton

La physique classique suppose que dans le référentiel d'un quelconque physicien en chute libre une entité continûment immobile peut être soumise à des contraintes qui ont alors une définition singulière. Elles ne sont identifiables que dans une classe particulière de référentiels en translation uniforme les uns par rapport aux autres, qui sont dits galiléens et par rapport auxquels l'absence de contrainte est reconnue par l'état de repos ou le mouvement de translation rectiligne et uniforme. Un élément particulier de cette classe serait l'éther luminifère où les équations de Maxwell en absence de source sont cohérentes, l'espace y étant homogène et isotrope.

Relativement à ces référentiels dont l'existence constitue la première loi de Newton, sa deuxième loi définie une variable pertinente permettant de représenter la résultante des contraintes qui s'exercent sur une entité en un quelconque évènement. C'est le vecteur force qui est égal à sa masse inerte multipliée par l'accélération qu'elle subie.

Cette construction est mathématiquement cohérente et justifiée par les prédictions qu'elle permet de faire pour deux types de contraintes mises en évidence par l'expérience à savoir l'interaction entre les entités massives et celle où interviennent les matières aimantées et les matières porteuses d'une charge électrique.

Les hypothèses 1 et 3 permettent d'apprécier dans un quelconque référentiel les trajectoires relatives, des uns par rapport aux autres, des entités qui subissent ces interactions gravitationnelles et électromagnétiques bien que les formules expérimentales qui suivent, auxquelles on doit associer le principe de superposition précisé au postulat 9, ne soient valables que dans les référentiels galiléens pour la gravitation et le référentiel éther pour l'électromagnétisme.

3.2.2 La gravitation

Dans un référentiel galiléen, toute particule élémentaire pouvant être immobilisée possède une masse inerte et une masse gravitationnelle et ces masses peuvent numériquement être choisies identiques. Si m_1 et m_2 sont les masses de deux tels entités, M_1 et M_2 étant leurs centres de symétrie, l'action gravitationnelle de m_1 sur m_2 est représentée à la date t par le vecteur force $\vec{F}(m_2, t)$,

$$\begin{aligned} \vec{F}(m_2, t) &= G m_1 m_2 \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^3} \\ \vec{r} &= \overrightarrow{M_2(t) M_1(t)} \end{aligned}$$

On remarque que la direction (et même la norme) de cette contrainte ne dépend pas de la vitesse initiale de m_2.

3.2.3 L'électromagnétisme

Dans le référentiel éther, une particule élémentaire porteuse d'une charge électrique q et en présence d'un champ électromagnétique $(\vec{E}, \vec{B})$ est soumise à la date t, lorsque son vecteur vitesse est $\vec{u}(t)$ et qu'elle est située en $M(t)$, à la force

$$\vec{F}(q, t) = q \left(\vec{E}(t, M(t)) + \vec{u}(t) \wedge \vec{B}(t, M(t)) \right)$$

Par ailleurs, toute charge électrique en mouvement génère un champ magnétique dont les vecteurs représentatifs sont toujours non nuls en dehors de sa trajectoire si son vecteur vitesse ne s'annule

jamais. Les vecteurs champs générés par q à la date t et en un point N de l'espace s'écrivent

$$\begin{aligned}\vec{E}(t,N) &= kq\frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^3}\\ \vec{B}(t,N) &= \frac{kq}{c^2}\vec{u}(t)\wedge\frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^3}\\ \vec{r} &= \overrightarrow{M(t)N}\end{aligned}$$

3.3 Incohérence de la représentation des interactions

Dans un référentiel galiléen, la résultante des contraintes appliquées à une entité en un quelconque évènement est un vecteur de même direction que l'accélération qu'elle subie. $\mathcal{R}'$ est le référentiel éther par rapport auquel $\mathcal{R}$ est en translation uniforme, et ils souhaitent prédire la trajectoire d'une charge électrique q sachant qu'il existe, entre autres, une particule élémentaire chargée q_0 qui est continûment immobile dans $\mathcal{R}'$. On suppose qu'il n'y a pas d'effets sans causes et qu'il est possible de sélectionner, au sein de la résultante des contraintes qui s'appliquent à q en un quelonque évènement, celles qui proviennent des propriétés de q_0.

(a) Dans $\mathcal{R}'$, la représentation de ces contraintes qui sont de nature gravitationnelle ou purement électrique ne dépend pas en direction (ni en norme) de la vitesse initiale de q.

(b) Dans $\mathcal{R}$, q_0 est animé d'un mouvement rectiligne et uniforme et génère un champ magnétique qui est partout non nul par conséquent la résultante des contraintes qu'elle exerce sur q dépend de façon flagrante, en norme et en direction, de la vitesse initiale de cette dernière.

Il y a une réelle incohérence entre ces deux propriétés car la deuxième loi de Newton enseigne que la représentation d'une contrainte ne dépend pas en direction (ni en norme) du référentiel galiléen qui l'observe. À première vue, elle peut être corrigée de deux manières.

(a) Dans un référentiel galiléen toute charge électrique immobile génère, en plus des champs gravitationnel et électrique, un champ quasi-magnétique qui a la propriété de modifier une trajectoire en fonction de sa vitesse initiale.

(b) La deuxième loi de Newton est approximative et la contrainte subie par une trajectoire, qui décrit les causes auquelles elle est exposée, la modifie en fonction de la norme et de la direction de sa vitesse initiale.

4 La transformation de Lorentz

4.1 Une présentation originale des équations de Maxwell

L'équation de Maxwell-Gauss énonce que dans une région de l'espace où n'est présente aucune charge, la divergence du champ électrique est continûment nulle. On note

$$\vec{\nabla}.\vec{E} = 0$$

Cette relation est équivalente à la formule expérimentale de Coulomb dès qu'on suppose que le champ électrique associé à une particule élémentaire immobile est radial et à symétrie sphérique.

L'équation de Maxwell-Faraday énonce que la variation au cours du temps d'un vecteur champ magnétique en un quelconque point de l'espace y crée un vecteur champ électrique selon la relation

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

Lors du phénomène d'induction électromagnétique, le champ électrique ainsi généré est responsable de la mise en mouvement ou de l'accélération des charges qui constituent un circuit électrique.

Le théorème d'Ampère énonce qu'un conducteur parcouru par un courant électrique génère dans son voisinage un champ magnétique. Si le conducteur est rectiligne et infini, les directions des vecteurs champ sont déterminées par l'observateur d'Ampère et on a la relation

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{B} = \vec{0}$$

Parce que le courant électrique provient du déplacement de la matière chargée, on peut déduire du principe de superposition que toute particule élémentaire porteuse d'une charge électrique et animée d'un mouvement rectiligne et uniforme crée dans son voisinage un champ magnétique. Cette hypothèse est conforme à la loi expérimentale de Biot et Savart qui permet de conclure qu'il n'existe pas de monopôle magnétique et que tout champ magnétique est crée par les mouvements des matières électriquement chargées. La formule de Coulomb indique que le mouvement d'une charge isolée n'est trahi en un quelconque point de l'espace que par la variation au cours du temps de l'information électrique qu'elle génère et l'équation de Mawell modifiant le théorème d'Ampère s'écrit

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Elle est conçue de sorte à être similaire à celle qui décrit l'induction électromagnétique et de sorte à rendre possible l'écriture de l'équation de conservation de la charge électrique s'il peut lui être associé une densité volumique. Sous cette hypothèse [9] qui n'est pas retenue dans la présente théorie, on peut définir les vecteurs champs générés par une particule élémentaire chargée au sein d'elle même et on a les relations

$$\vec{\nabla}.\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

L'équation de Maxwell-Gauss pour le magnétisme traduit l'inexistence des charges magnétiques et s'énonce par analogie

$$\vec{\nabla}.\vec{B} = 0$$

4.2 Le groupe de Poincaré

Les équations de Maxwell sont cohérentes dans un référentiel coulombien et devraient y décrire les champs générés par une particule élémentaire chargée et animée d'un quelconque mouvement rectiligne et uniforme. Les formules de Coulomb et de Biot et Savart indiquent que les vecteurs champs électriques et magnétiques qui lui sont associés en un quelconque point de l'espace ne peuvent être constants au cours du temps et on peut établir, $\Box$ étant l'opérateur de d'Alembert,

$$\Box \vec{E} = \vec{0} \qquad \Box \vec{B} = \vec{0}$$

La structure des solutions, qui mettent en évidence un nombre ayant la dimension d'une vitesse, signifie que l'information émane à chaque instant de la position de la charge et se propage dans le vide sous forme d'une sphère dont le rayon croît avec une vitesse constante. Cette propriété est nécessairement valable si la charge est immobile et implique que sa mise en mouvement ne peut induire au même instant et en tous les points de l'espace une variation des vecteurs champs qui lui sont associés.

On peut postuler [10] que la transformation des coordonnées d'espace et de temps entre deux référentiels en translation uniforme [11] est affine dès qu'ils sont munis des repères d'espaces cartésiens. Si ces référentiels peuvent être coulombiens, alors toute sphère dynamique qui prend naissance en un quelconque évènement et dont le rayon croît avec une vitesse constante égale à la vitesse de propagation d'une sphère électrique dans l'un des référentiels a la même caractéristique dans le second et décrit la propagation de l'information qui pourrait émaner d'une charge élémentaire électriquement chargée et non accélérée. Il résulte que toute trajectoire rectiligne et uniforme qui est réalisée dans l'un des référentiels à la vitesse de propagation d'une sphère électrique a la même caractéristique dans le second.

Toute application affine f, $f(ct, x, y, z) = (c't', x', y', z')$, $(c, c') \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, dont la différentielle F laisse invariant l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^4$ qui annulent la pseudo-norme de

9. Par définition de la notion de charge, un champ électrique généré par une particule élémentaire porteuse n'est concevable qu'à l'extérieur de celle-ci ce qui est incompatible avec l'application du théorème de stokes qui nécessite un champ de vecteurs partout définis.

10. C'est une conséquence de l'équation (27).

11. Les particules élémentaires qui constituent leurs supports sont en translation uniforme l'un par rapport à l'autre.

Minkowski, est telle que

$$F = \lambda\,\gamma \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & M_f & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\beta_2 & -\beta_3 & -\beta_4 \\ -\beta_2 & \dfrac{1}{\gamma} + \dfrac{\gamma\beta_2^2}{\gamma+1} & \dfrac{\gamma\beta_3\beta_2}{\gamma+1} & \dfrac{\gamma\beta_4\beta_2}{\gamma+1} \\ -\beta_3 & \dfrac{\gamma\beta_2\beta_3}{\gamma+1} & \dfrac{1}{\gamma} + \dfrac{\gamma\beta_3^2}{\gamma+1} & \dfrac{\gamma\beta_4\beta_3}{\gamma+1} \\ -\beta_4 & \dfrac{\gamma\beta_2\beta_4}{\gamma+1} & \dfrac{\gamma\beta_3\beta_4}{\gamma+1} & \dfrac{1}{\gamma} + \dfrac{\gamma\beta_4^2}{\gamma+1} \end{pmatrix}$$

$(\lambda, \beta_2, \beta_3, \beta_4) \in \mathbb{R}^4$, $\lambda \neq 0$, $\dfrac{1}{\gamma} = \sqrt{1 - \beta_2^2 - \beta_3^2 - \beta_4^2}$, M_f étant une matrice orthogonale. D'après la structure de la pseudo-norme de Minkowski, ces transformations sont réalisées si chacun des référentiels $\mathcal{R}(O, x, y, z)$ et $\mathcal{R}'(O', x', y', z')$ est muni d'un repère d'espace cartésien et orthonormé. $|\lambda|$ peut alors être interprétée comme un changement de l'étalon des longueurs lors du passage de $\mathcal{R}$ à $\mathcal{R}'$, $\dfrac{\lambda}{|\lambda|}$ comme un changement de la convention de signe utilisée pour caractériser la succession des instants, $\dfrac{\lambda}{|\lambda|} M_f$ comme un changement de direction et d'orientation des axes de (O, x, y, z) par rapport à (O', x', y', z'). $\dfrac{c}{c'}$ est la constante qui multiplie l'étalon des durées dans $\mathcal{R}$ pour obtenir celui dans $\mathcal{R}'$.

4.3 Quelques propriétés

4.3.1 Repères d'espace superposables

On suppose que $\mathcal{R}'$ se déplace dans $\mathcal{R}$ à la vitesse constante v suivant la droite (O, x). Il résulte alors de la relation (27) les égalités

$$\beta_3 = \beta_4 = 0 \qquad \beta_2 = \frac{v}{c}$$

Un choix approprié (lorsque $M = I$) de (O', x', y', z') permet d'écrire, k_t, k_x, k_y et k_z étant des constantes,

$$c't' = \lambda\gamma\left(ct - \frac{vx}{c}\right) + k_t \qquad x' = \lambda\gamma\,(x - vt) + k_x \qquad y' = \lambda y + k_y \qquad z' = \lambda z + k_z \qquad (7)$$

Il apparait que toute trajectoire ayant pour support la droite (O, x) dans $\mathcal{R}$ est une trajectoire ayant pour support la droite (O', x') dans $\mathcal{R}'$ et réciproquement. Par ailleurs, on peut déduire de l'expression de t' qu'un ensemble de phénomènes qui se produisent simultanément dans $\mathcal{R}$ sont simultanés dans $\mathcal{R}'$ si et seulement si ils se produisent d'après $\mathcal{R}$ sur un plan affine orthogonal à la droite (O, x). Le calcul donne

$$ct = \frac{\gamma}{\lambda}\left(c't' + \frac{vx'}{c} - k_t - \frac{vk_x}{c}\right)$$

Il résulte de cette formule qu'un ensemble de phénomènes qui se produisent simultanément dans $\mathcal{R}'$ sont simultanés dans $\mathcal{R}$ si et seulement si ils se produisent d'après $\mathcal{R}'$ sur un plan affine orthogonal à la droite (O', x'). En conclusion, les repères orthonormées (O, x, y, z) et (O', x', y', z') sont superposables.

4.3.2 Flexibilité du temps d'un référentiel en mouvement

t' étant la date indiquée dans $\mathcal{R}$ par l'horloge que constitue la particule élémentaire support du référentiel $\mathcal{R}'$,

$$c't'(t) = \lambda\gamma\left(ct - \frac{vx_{r'}(t)}{c}\right) + k_t \qquad x_{r'}(t) = x_{r'}(t_0) + v(t - t_0)$$

Quelques soient les réels t_2 et t_1,

$$t'(t_2) - t'(t_1) = \frac{c}{c'}\frac{\lambda}{\gamma}(t_2 - t_1)$$

4.3.3 Flexibilité de l'espace d'un référentiel en mouvement

Pour se représenter cette propriété, on va utiliser la fait que la longueur d'un objet linéaire est la distance spatiale entre deux phénomènes qui se produisent simultanément à ses extrémités. f étant affine, trois points matériels immobiles dans $\mathcal{R}'$ et disposés de sorte que l'un soit au milieu du segment de droite formé par les deux autres paraissent nécessairement dans la même configuration à chaque instant dans $\mathcal{R}$. Considérons alors deux phénomènes simultanés dans $\mathcal{R}'$ qui se produisent sur la droite (O', x') et aux points x'_a et x'_b. Il peut s'agir de la création de deux sphères électriques qui se rencontrent en $\dfrac{x'_a + x'_b}{2}$. Dans $\mathcal{R}$, ces phénomènes se produisent aux points x_a et x_b de la droite (O, x), aux dates t_a et t_b. x'_a, x'_b et $\dfrac{x'_a + x'_b}{2}$ sont des points mobiles se déplaçant à la vitesse v, à la date t_a le point x'_a est en x_a, x'_b en $\tilde{x}_b$, et $\dfrac{x'_a + x'_b}{2}$ en $\dfrac{x_a + \tilde{x}_b}{2}$, à la date t_b le point x'_a est en $\tilde{x}_a$, x'_b en x_b, et $\dfrac{x'_a + x'_b}{2}$ en $\dfrac{\tilde{x}_a + x_b}{2}$. On peut supposer que l'orientation de la droite temporelle dans $\mathcal{R}$ est normale :

$$\text{si la date } t_1 \text{ précède la date } t_2 \text{ alors } t_1 < t_2$$

En permutant au besoin les lettres a et b qui désignent des événements, on peut supposer

$$x_a \leq x_b$$

Alors $\min\{t_a, t_b\}$ est égal à t_a si $v \geq 0$, égal à t_b si $v \leq 0$, et les deux sphères électriques se rencontrent à une date $\hat{t}$ en

$$\frac{\tilde{x}_a + x_b}{2} + v(\hat{t} - t_b) = \frac{x_a + \tilde{x}_b}{2} + v(\hat{t} - t_a)$$

Il est évident qu'on peut écrire

$$x_b - \tilde{x}_a = \tilde{x}_b - x_a = (x_b - x_a) - v(t_b - t_a)$$

Ces relations restent exactent si a et b ne se produisent pas sur (O, x) et la contraction des longueurs de Lorentz, qui résulte de la perception instantanée d'une entité qui perdure car il y a réciprocité, est mise en évidence par la relation déduite de la transformation des coordonnées suivant (O', x')

$$x'_b - x'_a = \lambda\gamma(\tilde{x}_b - x_a)$$

Un ensemble de phénomènes qui se produisent simultanéments dans un plan affine orthogonal à (O, x) dans $\mathcal{R}$ sont simultanés dans $\mathcal{R}'$ par conséquent, s'ils se produisent le long d'un objet linéaire, les longueurs attribuées à cet objet permettent de comparer les étalons des distances spatiales. L'égalité de ces longueur s'écrit

$$\begin{aligned} \sqrt{(y'_b - y'_a)^2 + (z'_b - z'_a)^2} &= \sqrt{(y_b - y_a)^2 + (z_b - z_a)^2} \\ |\lambda| &= 1 \end{aligned}$$

4.3.4 Géométries distinctes

On suppose que $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ utilisent le même étalon des distances spatiales. Un physicien $\mathcal{P}'$ de $\mathcal{R}'$ construit un triangle isocèle $A'B'C'$ rectangle en B', et le dispose immobile de sorte que $[B'C']$ soit un segment de (O', x'). On note $B'C'$ la longueur du segment $[B'C']$ et $\hat{A}'$ l'angle intérieur au triangle défini par $[A'B']$ et $[A'C']$. Pour un physicien $\mathcal{P}$ de $\mathcal{R}$, $\mathcal{P}'$ a construit un triangle ABC rectangle en B et se déplaçant à la vitesse constante v sur (O, x) où est disposé le segment $[B, C]$. On peut déduire des formules de transformation

$$AB = A'B' \qquad BC = \frac{1}{\gamma}B'C' \qquad AC = \sqrt{BC^2 + AB^2}$$

ABC ne peut être un triangle isocèle par conséquent un repère orthonormé dans $\mathcal{R}'$ parait au plus orthogonal dans $\mathcal{R}'$.

$\mathcal{P}'$ dispose le triangle $A'B'C'$ immobile et de sorte que $[A'C']$ soit un segment de (O', x'). Si M' (resp. M) est le milieu de $[A'C']$ (resp. $[AC]$) dans $\mathcal{R}'$ (resp. $\mathcal{R}$), on peut déduire des formules de transformation

$$MB = M'B' \qquad AC = \frac{1}{\gamma}A'C' \qquad AB = BC = \sqrt{MB^2 + \frac{AC^2}{4}}$$

Le triangle isocèle ABC ne peut être rectangle du fait deux premières égalités. Ainsi, un repère orthogonal dans $\mathcal{R}'$ ne l'est pas nécessairement dans $\mathcal{R}$.

5 Application de la formule de Lorentz : L'électromagnétisme

$\mathcal{R}(O, x_2, x_3, x_4)$ et $\mathcal{R}'(O', x'_2, x'_3, x'_4)$ sont deux systèmes de coordonnées cartésiens, relatifs aux bases orthonormées

$$\mathcal{B}_r = (\vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4) \qquad \mathcal{B}_{r'} = (\vec{e}'_2, \vec{e}'_3, \vec{e}'_4)$$

On suppose que $\mathcal{R}'$ est en translation uniforme de vecteur vitesse $\vec{v}$ dans $\mathcal{R}$. S'ils sont coulombiens, alors la transformation f des coordonnées d'espace et de temps qu'ils définissent est élément du groupe de Poincaré. On peut noter, M étant une quelconque particule élémentaire,

$$\begin{aligned}
\tau'(\tau) &= f_1(\tau, x_2(\tau), x_3(\tau), x_4(\tau)) \\
x'_i(\tau') &= f_i(\tau, x_2(\tau), x_3(\tau), x_4(\tau)) \qquad 2 \leq i \leq 4 \\
\varphi_r(O, M(\tau)) &= x_i(\tau)\vec{e}_i \\
\varphi_{r'}(O', M(\tau')) &= x'_i(\tau')\vec{e}'_i
\end{aligned}$$

5.1 Relation fondamentale de la dynamique

5.1.1 Notion de Contrainte

Postulat 7. *(Les symétries d'espace et de temps) Dans tout référentiel coulombien, les lois de physique sont identiques en tous les évènements et dans toutes les directions de l'espace.*

Postulat 8. *(Notion de contrainte) Dans tout référentiel coulombien, toute particule élémentaire pouvant être immobilisée possède une masse inerte qui est une de ces propriétés fondamentales et la résultante des contraintes appliquées à une particule initialement immobile est égale à sa masse inerte multipliée par l'accélération qu'elle subie.*

Postulat 9. *(Principe de superposition) Dans un référentiel coulombien, la résultante des contraintes appliquées à une particule élémentaire est égale à leur somme.*

Il résulte du paragraphe 4.3.4 qu'on ne peut confondre les espaces vectoriels directions de deux espaces physiques en translation uniforme par conséquent un vecteur force ne peut être commun à deux référentiels. Le postulat 5 signifie que la trajectoire de M dans $\mathcal{R}$ est décrite par la relation

$$\begin{aligned}
\varphi_r(O, M(\tau)) &= \varphi_r(O, M(\tau_0)) + \frac{1}{c}\int_{\tau_0}^{\tau} \vec{u}(\alpha)d\alpha \\
&= \varphi_r(O, M(\tau_0)) + \frac{\vec{u}(\tau_0)}{c}(\tau - \tau_0) + \frac{1}{c^2}\int_{\tau_0}^{\tau} (\tau - \alpha)\vec{a}(\alpha)d\alpha
\end{aligned}$$

Si $\vec{u}(\tau) = \vec{0}$ en l'évènement δ, alors la résultante des contraintes appliquées à M est

$$\vec{F}(M, \tau) = m\vec{a}(\tau)$$

La relation fondamentale de la dynamique doit prédire la valeur de $\vec{a}(\tau)$ si ces mêmes contraintes lui sont appliquées lorsque $\vec{u}(\tau) \neq \vec{0}$. Si $\mathcal{R}''$ est le référentiel coulombien en translation uniforme de vecteur vitesse $\vec{u}$ dans $\mathcal{R}$, cette relation peut être déduite de l'application $\mathcal{I}^f_{\delta,r}$ définie en l'évènement δ sur $\mathcal{V}_{r''}$ et à valeurs dans $\mathcal{V}_r$ par

$$\vec{F}''(M, \tau'') \longmapsto \vec{F}(M, \tau)$$

Elle est en partie déterminée par le principe de superposition et celui de l'isotropie de l'espace.

5.1.2 La force de Lorentz

On sait que l'interaction entre deux charges statiques s'effectue suivant la droite qui les relie, qu'un conducteur rectiligne infini et parcouru par un courant crée un champ magnétique dont la direction est déterminée par l'observateur d'Ampère, que deux tels conducteurs disposés parallèlement sur un plan s'attirent ou se repoussent suivant les sens et les intensités des courants, que le courant électrique provient du déplacement à vitesse réglable de la matière chargée, que le mouvement de cette matière s'effectue sans variation de vitesse lorsqu'elle est plongée dans un champ magnétique et que ce mouvement est rectiligne lorsqu'elle se déplace entre deux surfaces planes définissant un champ électrique uniforme. La formule de Lorentz, qui généralise la force expérimentale de Laplace, prédit avec une précision appréciable la trajectoire de cette matière dans des conditions imposées et s'écrit, M étant porteuse d'une charge q et en présence du champ électromagnétique $(\vec{E}, \vec{B})$,

$$q\vec{E} + qc\ \frac{d}{d\tau}\varphi_r(O, M(\tau)) \wedge \vec{B} = mc^2 \frac{d^2}{d\tau^2}\varphi_r(O, M(\tau)) \tag{8}$$

5.1.3 Relation fondamentale de la dynamique

Le postulat suivant permet, lorsqu'on lui associe celui de l'invariance quantitative de la charge par rapport au mouvement de la matière porteuse, de retrouver l'expression de la force de Lorentz et les propriétés à l'origine de sa formulation.

Postulat 10. *Dans un référentiel coulombien $\mathcal{R}$, la résultante des contraintes appliquées à une particule élémentaire de masse inerte m en un évènement où son vecteur vitesse est $\vec{u}$ s'écrit*

$$\vec{F}(\tau) = mc\ \frac{d}{d\tau}(\gamma_u \vec{u}) \qquad \gamma_u^{-1} = \sqrt{1 - \frac{<\vec{u}, \vec{u}>_r}{c^2}}$$

Il résulte de ce postulat les relations

$$\begin{aligned}
\vec{F} &= m\gamma_u^3\ \{\vec{a} + \frac{\vec{u}}{c^2} \wedge \vec{u} \wedge \vec{a}\} \\
\vec{a} &= \gamma_u^{-3}\ \{\frac{\vec{F}}{m} - \gamma_u^2 \frac{\vec{u}}{c^2} \wedge \vec{u} \wedge \frac{\vec{F}}{m}\} \\
\gamma_u \vec{F} &= mc^2\ \frac{d^2}{d\sigma^2}\varphi_r(O, M(\tau)) \\
\sigma(\tau) &= \sigma(\tau_0) + \int_{\tau_0}^{\tau} \gamma_u^{-1}(\alpha) d\alpha
\end{aligned}$$

Précisons à présent la transformation d'une résultante de contraintes entre $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$. À priori, la relation définie à la proposition 5.1 n'est valide que parce que $\mathcal{R}'$ est en translation uniforme dans $\mathcal{R}$ car dans la généralité on ne sait pas si γ_v est identique à f_{11} (à une constante multiplicative près), $\vec{v}$ étant le vecteur vitesse dans $\mathcal{R}$ d'un point matériel continûment immobile dans $\mathcal{R}'$. On suppose que les étalons des longueurs et des durées sont identiques et que les axes temporels ont la même orientation. Ces hypothèses se traduisent dans les équations qui suivent par les relations

$$\epsilon = \mu = 1 \qquad c' = c$$

Proposition 5.1. *Si deux évènements éléments de la trajectoire de M sont localisés aux dates $\frac{\tau_1}{c}$ et $\frac{\tau_2}{c}$ dans $\mathcal{R}$ et aux dates $\frac{\tau_1'}{c}$ et $\frac{\tau_2'}{c}$ dans $\mathcal{R}'$, alors σ et σ' étant les fonctions définies ci-dessus, on peut écrire*

$$\sigma(\tau_2) - \sigma(\tau_1) = \sigma'(\tau_2') - \sigma'(\tau_1')$$

Démonstration. En effet, si on note

$$f_{1i} = \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \qquad \vec{\nabla} f_1 = f_{1i}\vec{e}_i$$

alors la structure de la matrice différentielle de f permet d'écrire

$$\frac{\vec{u}'}{c'} = \frac{\vec{\nabla} f_1 + \epsilon\sqrt{\mu}\ \frac{\vec{u}}{c} + \frac{\vec{\nabla} f_1}{f_{11} + \epsilon\sqrt{\mu}} < \vec{\nabla} f_1, \frac{\vec{u}}{c} >_r}{f_{11} + < \vec{\nabla} f_1, \frac{\vec{u}}{c} >_r} \tag{9}$$

On déduit explicitement des équations (9) et (27) la relation

$$\gamma_{u'} = \gamma_u \gamma_v (1 - \frac{< \vec{v}, \vec{u} >_r}{c^2})$$

Il résulte, la variable τ caractérisant l'évènement décrit par $(\tau, M(\tau))$,

$$\frac{d\sigma}{d\tau} = \gamma_u^{-1} = \gamma_{u'}^{-1} \gamma_v (1 - \frac{< \vec{v}, \vec{u} >_r}{c^2}) = \frac{\gamma_v}{f_{11}} \gamma_{u'}^{-1}\ (f_{11} + < \vec{\nabla} f_1, \frac{\vec{u}}{c} >_r) = \frac{\gamma_v}{f_{11}} \gamma_{u'}^{-1} \frac{d\tau'}{d\tau} = \frac{\gamma_v}{f_{11}} \frac{d\sigma'}{d\tau}$$

□

On peut écrire, $g = f^{-1}$, $2 \leq i \leq 4$,

$$\begin{aligned} x_i(\tau) &= g_i(\tau', x_2'(\tau'), x_3'(\tau'), x_4'(\tau')) \\ \frac{d}{d\sigma} x_i(\tau) &= \frac{\partial g_i}{\partial \tau'} \frac{d\tau'}{d\sigma} + < \vec{\nabla} g_i, \frac{d}{d\sigma} \varphi_{r'}(O', M(\tau')) >_{r'} \\ < \vec{e}_i, \gamma_u \frac{\vec{u}}{c} >_r &= \frac{\partial g_i}{\partial \tau'} \gamma_{u'} + < \vec{\nabla} g_i, \gamma_{u'} \frac{\vec{u'}}{c} >_{r'} \end{aligned}$$

On souhaite dériver cette dernière égalité par rapport à σ et on remarque qu'on peut déduire du postulat 10 la relation

$$\frac{d}{d\sigma}(m\gamma_{u'}) = < \frac{\vec{u'}}{c^3}, \gamma_{u'} \vec{F}' >_{r'}$$

Il vient

$$\begin{aligned} < \vec{e}_i, \gamma_u \vec{F} >_r &= \frac{\partial g_i}{\partial \tau'} < \frac{\vec{u'}}{c}, \gamma_{u'} \vec{F}' >_{r'} + < \vec{\nabla} g_i, \gamma_{u'} \vec{F}' >_{r'} \\ < \vec{e}_i, \gamma_u \vec{F} >_r &= < \frac{\partial g_i}{\partial \tau'} \frac{\vec{u'}}{c} + \vec{\nabla} g_i, \gamma_{u'} \vec{F}' >_{r'} \end{aligned} \tag{10}$$

Il n'est pas restrictif de choisir $\mathcal{B}_r$ et $\mathcal{B}_{r'}$ de sorte que $M_f = M_g = I$ et on peut noter

$$\tilde{u} = < \vec{u}, \vec{e}_i >_r \vec{e}_i' = \tilde{u}_i \vec{e}_i'$$

Alors

$$f_{1j} = -g_{1j} = -g_{j1} \qquad f_{ij} = g_{ij} \qquad \gamma_{u'} \frac{\vec{u}_j'}{c} = \gamma_u (-g_{1j} + < \vec{\nabla} g_j, \frac{\tilde{u}}{c} >_{r'})$$

L'équation (10) devient

$$F_i = (g_{11} - < \vec{\nabla} g_1, \frac{\tilde{u}}{c} >_{r'}) g_{ij} F_j' + g_{1i} (-g_{1j} + < \vec{\nabla} g_j, \frac{\tilde{u}}{c} >_{r'}) F_j' \tag{11}$$

Si on note

$$\tilde{F} = F_i \vec{e}_i' \qquad \vec{\theta}'(g, \vec{F}') = < \vec{\nabla} g_i, \vec{F}' >_{r'} \vec{e}_i'$$

Il vient

$$\tilde{F} = (g_{11} \vec{\theta}'(g, \vec{F}') - < \vec{\nabla} g_1, \vec{F}' >_{r'} \vec{\nabla} g_1) + \frac{\tilde{u}}{c} \wedge \vec{\nabla} g_1 \wedge \vec{\theta}'(g, \vec{F}') \tag{12}$$

$\wedge$ étant relatif à $\mathcal{B}_{r'}$.

5.2 Champs associés à une charge en translation uniforme

5.2.1 La force électromagnétique

q et q' sont deux particules élémentaires désignées par les charges électriques qu'elles portent, qui se trouvent à la date $\frac{\tau}{c}$ dans $\mathcal{R}$ aux points $q(\tau)$ et $q'(\tau)$. q ayant pour support le référentiel $\mathcal{R}'$, l'information qu'elle y génère pertube la trajectoire de q' suivant la relation

$$\vec{F}'(q',\tau') = q'\vec{E}'$$

Si dans $\mathcal{R}'$ la valeur de la charge portée par q' ne dépend pas de son mouvement, l'équation (12) permet de représenter l'information correspondante dans $\mathcal{R}$ par

$$\vec{F}(q',\tau) = q'\vec{E} + q'\vec{u} \wedge \vec{B} \tag{13}$$

les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ ne dépendant que de la valeur de q et de sa trajectoire dès qu'il en est de même pour $\vec{E}'$.

5.2.2 Les équations du champ électromagnétique

Il résulte du postulat 9 que les champs associés à une quelconque distribution de charges en translations uniformes dans le référentiel coulombien $\mathcal{R}$ sont de nature électromagnétique et sont les sommes des contributions des différentes particules élémentaires constituant la distribution. Pour les caractériser, on peut rechercher les relations linéaires qu'ils satisfont lorsqu'ils sont générés par l'unique élément q'. La loi de Coulomb signifie que dans le référentiel $\mathcal{R}'$ ayant pour support q', $\vec{B}'$ est nul et $\vec{E}'$ est uniquement déterminé, à une constante multiplicative près, par le fait qu'il est indépendant du temps, à divergence nulle, à rotationnel nul et dérive d'un potentiel à symétrie sphérique. Ces propriétés s'écrivent, un vecteur gradient étant orthogonal à une surface équipotentielle,

$$\frac{\partial \vec{E}'}{\partial \tau'} = \vec{0} \qquad < \vec{\nabla}, \vec{E}' >_{r'} = 0 \qquad \vec{\nabla} \wedge \vec{E}' = \vec{0} \qquad \varphi_{r'}(q'(.),.) \wedge \vec{E}' = \vec{0} \tag{14}$$

On obtient 10 équations linéaires par rapport aux composantes de $\vec{E}'$ relatives à un quelconque repère cartésien et orthonormé de $\mathcal{R}'$, dont trois seulement dépendent explicitement de la position de q'. Recherchons des relations similaires entres les vecteurs champs observables dans $\mathcal{R}$.

On peut noter

$$\tilde{F}(q',\tau) = q'\tilde{E} + q'\tilde{u} \wedge \tilde{B} \qquad \vec{F}'(q',\tau') = q'\vec{E}' + q'\vec{u}' \wedge \vec{B}'$$

L'équation (11) s'écrit

$$F'_i = (g_{11} + < \vec{\nabla} g_1, \frac{\vec{u}'}{c} >_{r'}) < \vec{\nabla} g_i, \tilde{F} >_{r'} - g_{1i}(g_{1j} + < \vec{\nabla} g_j, \frac{\vec{u}'}{c} >_{r'})\tilde{F}_j$$

L'expression qui apparait sous la forme d'une somme est proportionnelle au produit scalaire entre $\tilde{u}$ et $\tilde{F}$ et on peut écrire

$$\begin{aligned} < \vec{E}' + \vec{u}' \wedge \vec{B}', \vec{e}_i >_{r'} &= (g_{11} + < \vec{\nabla} g_1, \frac{\vec{u}'}{c} >_{r'}) < \vec{\nabla} g_i, \tilde{E} >_{r'} \\ &- g_{1i}(g_{1j} + < \vec{\nabla} g_j, \frac{\vec{u}'}{c} >_{r'})\tilde{E}_j \\ &+ (g_{11} + < \vec{\nabla} g_1, \frac{\vec{u}'}{c} >_{r'}) < \vec{\nabla} g_i, \tilde{u} \wedge \tilde{B} >_{r'} \end{aligned}$$

On sait que

$$\begin{aligned} (g_{11} + < \vec{\nabla} g_1, \frac{\vec{u}'}{c} >_{r'}) < \vec{\nabla} g_i, \frac{\tilde{u}}{c} \wedge \tilde{B} >_{r'} &= < (g_{1j} + < \vec{\nabla} g_j, \frac{\vec{u}'}{c} >_{r'})\vec{e}'_j, \tilde{B} \wedge \vec{\nabla} g_i >_{r'} \\ &= < \vec{\nabla} g_1, \tilde{B} \wedge \vec{\nabla} g_i >_{r'} + < \vec{\theta}'(g, \frac{\vec{u}'}{c}), \tilde{B} \wedge \vec{\nabla} g_i >_{r'} \end{aligned}$$

Sachant que

$$< \vec{\nabla} g_1, \tilde{B} \wedge \vec{\nabla} g_i >_{r'} = < \vec{\nabla} g_i, \vec{\nabla} g_1 \wedge \tilde{B} >_{r'} = < \vec{e}'_i, \vec{\nabla} g_1 \wedge \tilde{B} >_{r'}$$

Il vient

$$E'_i = g_{11} < \vec{\nabla} g_i, \tilde{E} >_{r'} - g_{1i} < \vec{\nabla} g_1, \tilde{E} >_{r'} + c < \vec{\nabla} g_1 \wedge \tilde{B}, \vec{e}'_i >_{r'} \tag{15}$$

De plus,

$$< \vec{u}' \wedge \vec{B}', \vec{e}'_i >_{r'} = \frac{u'_k}{c} \left(g_{1k} < \vec{\nabla} g_i, \tilde{E} >_{r'} - g_{1i} < \vec{\nabla} g_k, \tilde{E} >_{r'} + c < \vec{\nabla} g_k, \tilde{B} \wedge \vec{\nabla} g_i >_{r'} \right)$$

$$B'_i = g_{1\epsilon_1(i)} < \vec{\nabla} g_{\epsilon_2(i)}, \tilde{E} >_{r'} - g_{1\epsilon_2(i)} < \vec{\nabla} g_{\epsilon_1(i)}, \tilde{E} >_{r'} + c < \tilde{B}, \vec{\nabla} g_{\epsilon_2(i)} \wedge \vec{\nabla} g_{\epsilon_1(i)} >_{r'} \tag{16}$$

Par ailleurs, on peut noter

$$\vec{E}' = \vec{E}'(\tau', x'_2, x'_3, x'_4) \qquad \vec{E} = \vec{E}(\tau, x_2, x_3, x_4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau'} &= g_{11} \frac{\partial}{\partial \tau} + \sum_{j=2}^{4} g_{1j} \frac{\partial}{\partial x_j} \\ \frac{\partial}{\partial x'_i} &= g_{1i} \frac{\partial}{\partial \tau} + \sum_{i=2}^{4} g_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \end{aligned}$$

Enfin, M' étant un quelconque point de l'espace de $\mathcal{R}'$ et τ' un quelconque réel,

$$\begin{aligned} \varphi_{r'}(q'(\tau'), M') &= \varphi_{r'}(q'(\tau'_-), M') \\ &= -\|\varphi_r(q'(\tau_-), M'(\tau))\|_r \vec{\nabla} g_1 + \sum_{i=2}^{4} < \varphi'_r(q'(\tau_-), M'(\tau)), \vec{\nabla} g_i >_{r'} \vec{e}'_i \end{aligned}$$

$$\varphi'_r(q'(\tau_-), M'(\tau)) = \sum_{i=2}^{4} < \varphi_r(q'(\tau_-), M'(\tau)), \vec{e}_i >_r \vec{e}'_i$$

La première égalité a lieu parce que q' est immobile dans $\mathcal{R}'$ et le seconde parce que g est affine. Cette représentation n'est pas unique mais est pertinente car elle met en évidence le fait que le signal présent en $M'((\tau))$ à la date $\frac{\tau}{c}$ dans $\mathcal{R}$ a pris naissance en $q'(\tau_-)$ à la date $\frac{\tau_-}{c}$. On a

$$\tau'_- = \tau' - \|\varphi_{r'}(q'(\tau'_-), M')\|_{r'} \qquad \tau_- = \tau - \|\varphi_r(q'(\tau_-), M'(\tau))\|_{r'}$$

Il résulte qu'en substituant les relations (15) dans (14) et en leurs associant (16) où on impose au vecteur $\vec{B}'$ d'être nul, la loi de Coulomb se traduit par 13 équations linéaires par rapport aux composantes de $\vec{E}$ et $\vec{B}$ relatives à un quelconque repère cartésien et orthonormé de $\mathcal{R}$, dont trois seulement dépendent explicitement de la trajectoire de q'. L'idéal serait d'en extraire des équations qui ne dépendent pas du choix de l'élément f du groupe de Poincaré, autrement dit du choix de $\mathcal{R}$ dans la classe des référentiels en translation uniforme par rapport à $\mathcal{R}'$, et il en existe au moins 8 à savoir les équations de Maxwell dites dans le vide.

6 Les transformations admissibles

6.1 Les transformations réellement admissibles

Si on suppose, conformément aux pertinentes équations de Maxwell dites dans le vide, que l'information générée en un quelconque évènement par une particule élémentaire chargée qui s'y trouve se propage dans tous les référentiels par rapport auxquels elle est en translation uniforme avec la même vitesse dans toutes les directions, la valeur de cette vitesse ne dépendant que du choix des étalons des intervalles d'espace et temps, alors il est possible de contruire la transformation de Lorentz et de prédire qualitativement et quantitativement les lois expérimentales de l'électromagnétisme à partir de la formule fondamentale de Coulomb supposée valide lorsque la particule générant l'information est immobile.

Postulat 11. *Dans un quelconque référentiel, l'information générée en un quelconque évènement par une particule élémentaire chargée qui s'y trouve se propage avec la même vitesse dans toutes les directions et la valeur de cette vitesse ne dépend que du choix des étalons des intervalles d'espace et de temps.*

Ce postulat signifie qu'au sein d'un référentiel $\mathcal{R}$, seule la trajectoire d'une particule élémentaire $\mathcal{P}'$ est responsable de la variation des intervalles d'espace et de temps constatés dans le référentiel $\mathcal{R}'$ ayant pour support $\mathcal{P}'$.

Une transformation réellement admissible est une application bijective définie sur $\mathbb{R}^4$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^4$, suffisamment régulière, qui décrit la transformation des coordonnées spatio-temporelles entre deux repères cartésiens relatifs à des bases orthonormées de l'espace. Une telle application peut être notée

$$f = (f_1, f_2, f_3, f_4) = f(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

x_1 étant la variable temporelle multipliée par la vitesse (positive) de propagation d'une sphère électrique. Il résulte du postulat qui précède la relation, quelques soient les éléments de $\mathbb{R}^4$

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \qquad y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$$

$$\left\{(y_1 - x_1)^2 = \sum_{i=2}^{4}(y_i - x_i)^2\right\} \iff \left\{(f_1(y) - f_1(x))^2 = \sum_{i=2}^{4}(f_i(y) - f_i(x))^2\right\} \tag{17}$$

Si une sphère électrique est générée en l'évènement décrit par x (resp. $f(x)$) dans un référentiel $\mathcal{R}$ (resp. $\mathcal{R}'$) et si un phénomène s'y produit en un évènement décrit par y dans $\mathcal{R}$, alors la distance spatiale qui le sépare du lieu de création de la sphère est égale à la distance temporelle (normalisée) dans $\mathcal{R}$ comme dans $\mathcal{R}'$. Cette relation définie l'invariant relativiste si f est affine et est réalisée entre deux systèmes de coordonnées utilisant les mêmes étalons des distances spatiales.

Si f est une transformation réellement admissible et non affine qui est réalisée entre deux référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$, alors l'ensemble des évènements décrivant dans $\mathcal{R}$ l'évolution d'une sphère électrique décrivent dans $\mathcal{R}'$ la trajectoire non rectiligne d'un point dont la vitesse d'éloignement du lieu de création de la sphère est de module constant. Une transformation admissible est une hypothétique transformation des coordonnées d'espace et de temps entre deux systèmes cartésiens relatifs à des bases orthonormées, continûment différentiable et qui transforme toute trajectoire réalisée à la vitesse de propagation d'une sphère électrique en une trajectoire similaire. Toute transformation réellement admissible et affine est une transformation admissible car sa matrice différentielle vérifie l'équation (19) et par conséquent l'équation 18.

Proposition 6.1. *Toute transformation réellement admissible est une transformation admissible.*

6.2 Le groupe des transformations admissibles

On considère deux systèmes cartésiens $\mathcal{R} = \mathcal{R}(O, x, y, z)$ et $\mathcal{R}' = \mathcal{R}'(O', x', y', z')$, chacun utilisant un repère orthonormé d'espace. Le postulat (11) permet de préciser l'application f qui associe à (ct, x, y, z), coordonnées dans $\mathcal{R}$ d'un certain évènement, ses coordonnées $(c't', x', y', z')$ dans $\mathcal{R}'$. La trajectoire dans $\mathcal{R}$ d'un point matériel dont l'intensité du vecteur vitesse est égal à c est décrite par l'ensemble, entre les évènements a et b,

$$\{(ct, x(ct), y(ct), z(ct)) \qquad t \in]t_a, t_b[\qquad (\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2 + (\frac{dz}{dt})^2 = c^2\}$$

On peut définir les ensembles

$$\tilde{S}_1 = \{(u_2, u_3, u_4)\ ,\ u_i \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})\ ,\ u_i = u_i(\xi)\ ,\ \sum_{i=2}^{4}(\frac{du_i}{d\xi})^2 = 1\}$$

$$\mathcal{T}(\tilde{S}_1) = \Big\{\{(u_1(\eta), u(u_1(\eta)))\ ,\ \eta \in \mathcal{O}\}\ ,\ u_1 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})\ ,\ u \in \tilde{S}_1\ ,\ \mathcal{O} \text{ ouvert de } \mathbb{R}\Big\}$$

On peut noter

$$\Lambda' = \{(u'_1(\eta), u'_2(u'_1(\eta)), u'_3(u'_1(\eta)), u'_4(u'_1(\eta)))\ ,\ \eta \in \mathcal{O}\} = \{f(M), M \in \Lambda\} = f(\Lambda) \qquad \Lambda \in \mathcal{T}(\tilde{S}_1)$$

Le postulat 11 est alors contenu dans la relation

$$\Lambda \in \mathcal{T}(\tilde{S}_1) \Longrightarrow f(\Lambda) \in \mathcal{T}(\tilde{S}_1) \tag{18}$$

On peut écrire, $i \in \{2,3,4\}$,

$$\frac{du'_1}{d\eta} = \frac{df_1}{dx_1}\frac{du_1}{d\eta} + \sum_{j=2}^{4}\frac{df_1}{dx_j}\frac{du_j}{d\xi}\frac{du_1}{d\eta} \qquad \frac{d(u'_i \circ u'_1)}{d\eta} = \frac{df_i}{dx_1}\frac{du_1}{d\eta} + \sum_{j=2}^{4}\frac{df_i}{dx_j}\frac{du_j}{d\xi}\frac{du_1}{d\eta}$$

En notant F la matrice différentielle de f, il vient

$$\begin{pmatrix} \dfrac{du'_1}{d\eta} \\ \dfrac{d(u'_2 \circ u'_1)}{d\eta} \\ \dfrac{d(u'_3 \circ u'_1)}{d\eta} \\ \dfrac{d(u'_4 \circ u'_1)}{d\eta} \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} \dfrac{du_1}{d\eta} \\ \dfrac{d(u_2 \circ u_1)}{d\eta} \\ \dfrac{d(u_3 \circ u_1)}{d\eta} \\ \dfrac{d(u_4 \circ u_1)}{d\eta} \end{pmatrix} \qquad \frac{du'_1}{d\eta}\begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{du'_2}{d\xi} \\ \dfrac{du'_3}{d\xi} \\ \dfrac{du'_4}{d\xi} \end{pmatrix} = F\ \frac{du_1}{d\eta}\begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{du_2}{d\xi} \\ \dfrac{du_3}{d\xi} \\ \dfrac{du_4}{d\xi} \end{pmatrix}$$

La relation 18 peut se mettre sous la forme

$$\sum_{i=2}^{4}\left(\frac{d(u_i \circ u_1)}{du_1}\right)^2 = 1 \implies \sum_{i=2}^{4}\left(\frac{d(u'_i \circ u'_1)}{du'_1}\right)^2 = 1$$

$$\left(\frac{du_1}{d\eta}\right)^2 - \sum_{i=2}^{4}\left(\frac{d(u_i \circ u_1)}{d\eta}\right)^2 = 1 \implies \left(\frac{du'_1}{d\eta}\right)^2 - \sum_{i=2}^{4}\left(\frac{d(u'_i \circ u'_1)}{d\eta}\right)^2 = 1$$

Il résulte que F est telle que

$$\forall\ h \in \mathbb{R}^4\ ,\ \left\{h_1^2 - \sum_{i=2}^{4} h_i^2 = 0\right\} \implies \left\{h'^2_1 - \sum_{i=2}^{4} h'^2_i = 0\right\} \qquad h' = Fh \tag{19}$$

On désigne par $\mathcal{N}$ l'ensemble des applications définies sur $\mathbb{R}^4$, continûment différentiables et dont les matrices différentielles satisfont les relations ci-dessus. C'est l'ensemble des transformations admissibles qui forment nécessairement un groupe d'après les expressions connues de la matrice différentielle de l'inverse d'une application et de celle de la composée de deux applications.

6.3 Équations caractéristiques

Soit $h \in \mathbb{R}^4$. On pose

$$h' = Fh \qquad f_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \qquad P(h) = h_1^2 - \sum_{i=2}^{4} h_i^2$$

Il vient

$$h'_i = \sum_{j=1}^{4} f_{ij}h_j \qquad P(h') = \sum_{i=1}^{4}\left(f_{1i}^2 - \sum_{k=2}^{4} f_{ki}^2\right)h_i^2 + 2\sum_{i\neq j}\left(f_{1i}f_{1j} - \sum_{k=2}^{4} f_{ki}f_{kj}\right)h_ih_j$$

$P(h)$ et $P(h')$ sont des polynômes de second degré par rapport à la variable h_1 et de la relation

$$P(h) = 0 \quad \Longrightarrow \quad P(h') = 0$$

il résulte qu'il existe une fonction réelle μ définie sur $\mathbb{R}^4$ et non nulle en tout point, telle que

$$P(h') = \mu P(h)$$

Il vient les équations

$$f_{11}^2 - \sum_{k=2}^{4} f_{k1}^2 = \mu \qquad f_{1i}^2 - \sum_{k=2}^{4} f_{ki}^2 = -\mu \quad (i \neq 1) \qquad f_{1i}f_{1j} - \sum_{k=2}^{4} f_{ki}f_{kj} = 0 \quad (i \neq j)$$

On peut écrire

$$F^tF = \mu \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} f_{11}^2 & f_{11}f_{12} & f_{11}f_{13} & f_{11}f_{14} \\ f_{12}f_{11} & f_{12}^2 & f_{12}f_{13} & f_{12}f_{14} \\ f_{13}f_{11} & f_{13}f_{12} & f_{13}^2 & f_{13}f_{14} \\ f_{14}f_{11} & f_{14}f_{12} & f_{14}f_{13} & f_{14}^2 \end{pmatrix}$$

On peut écrire

$$F^tF = \mu J + 2(f_{1i}f_{1j})_{ij} \tag{20}$$

Le calcul du déterminant donne, avec $\lambda \in \mathbb{R}$, I la matrice identité,

$$\det(F^tF - \lambda I) = (\mu - \lambda)^2\{2(\mu - \lambda)f_{11}^2 - (\mu + \lambda)(2f_{12}^2 + 2f_{13}^2 + 2f_{14}^2 + \mu - \lambda)\}$$

$\forall\ x \in \mathbb{R}^4$, le quadruplet de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ $(p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x))$, $p_i = (f_{2i}, f_{3i}, f_{4i})^t$, est nécessairement lié par conséquent il existe quatre fonctions réelles α_1, α_2, α_3 et α_4 qui ne peuvent s'annuler simultanément et telles que

$$\sum_{i=1}^{4} \alpha_i(x)p_i(x) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^4$$

On peut écrire

$$p_j^t \left(\sum_{i=1}^{4} \alpha_i p_i \right) = \sum_{i=1}^{4} \alpha_i (p_j^t p_i) = 0 \qquad 1 \leq j \leq 4$$

Le déterminant de la matrice $(p_j^t p_i)_{ij}$ est nécessairement nul. L'équation (20) donne

$$p_1^t p_1 = f_{11}^2 - \mu \qquad p_i^t p_i = f_{1i}^2 + \mu \quad (i \neq 1) \qquad p_i^t p_j = f_{1i}f_{1j} \quad (i \neq j) \tag{21}$$

Il vient

$$\det\left((p_j^t p_i)_{ij}\right) = \mu^3 \left\{ f_{11}^2 - \mu - \sum_{i=2}^{4} f_{1i} \right\} \qquad \mu = f_{11}^2 - \sum_{i=2}^{4} f_{1i}^2$$

En considérant l'équation 20 et la nouvelle expression de μ, il est naturel de définir f_1 comme étant la fonction génératrice de f. Par ailleurs, on peut écrire

$$\det(F^tF - \lambda I) = (\mu - \lambda)^2\{\lambda^2 + 2\lambda(\mu - 2f_{11}^2) + \mu^2\}$$

On peut déduire les valeurs propres de F^tF

$$\lambda_1 = \mu \qquad \lambda_2 = (2f_{11}^2 - \mu) - 2|f_{11}|\sqrt{f_{11}^2 - \mu} \qquad \lambda_3 = (2f_{11}^2 - \mu) + 2|f_{11}|\sqrt{f_{11}^2 - \mu}$$

Le réel $\dfrac{f_{11}}{|f_{11}|}$ est bien défini : en effet, si h est un vecteur propre associé à la valeur propre μ, on peut écrire

$$0 < \ (Fh)^t(Fh) = h^t(F^tF)h = h^t(\mu h) = \mu(h^t h)$$

Nécessairement,

$$\mu = f_{11}^2 - \sum_{k=2}^{4} f_{1k}^2 \ > 0$$

$$f_{11}(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^4 \tag{22}$$

Il résulte de la continuité de la fonction f_{11} que son signe est constant. f_1 est une fonction monotone de la variable x_1 ce qui caractérise l'irreversibilité de l'écoulement du temps lors d'un changement de système de coordonnées.

Proposition 6.2. *Si $f = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ est élément de $\mathcal{N}$, alors*

$$f_{i1} = \sum_{k=2}^{4} \frac{f_{1k}}{f_{11}} f_{ik} \qquad 2 \leq i \leq 4$$

Si de plus f est continûment différentiable au second ordre alors il existe trois matrices A_2^f,

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \begin{pmatrix} f_{i2} \\ f_{i3} \\ f_{i4} \end{pmatrix} = A_j^f \begin{pmatrix} f_{i2} \\ f_{i3} \\ f_{i4} \end{pmatrix} \qquad (i,j) \in \{2,3,4\}$$

Démonstration. Montrons d'abord que, $\forall\, x \in \mathbb{R}^4$, les vecteurs $\{p_2(x), p_3(x), p_4(x)\}$ forment une base de $\mathbb{R}^3$. En effet, soient α_2, α_3 et α_4 des fonctions réelles telles qu'il existe $x \in \mathbb{R}^4$ vérifiant

$$\sum_{i=2}^{4} \alpha_i(x) p_i(x) = 0$$

On peut écrire

$$p_j^t(x) \left(\sum_{i=2}^{4} \alpha_i(x) p_i(x) \right) = \sum_{i=2}^{4} \alpha_i(x) (p_j^t(x) p_i(x)) = 0 \qquad 2 \leq j \leq 4$$

Le calcul donne

$$\det \left((p_j^t p_i)_{2 \leq i,j \leq 4} \right) = \mu f_{11}^2$$

Ce déterminant est non nul en tout point par conséquent $(\alpha_2(x), \alpha_3(x), \alpha_4(x)) = (0,0,0)$. C'est ce qu'on voulait démontrer. La matrice $(p_j^t p_i)_{2 \leq i,j \leq 4}$ a pour inverse

$$D = \frac{1}{\mu} I - \frac{1}{\mu f_{11}^2} (f_{1i} f_{1j})_{ij} \tag{23}$$

I étant la matrice identité de $\mathbb{R}^3$. On peut chercher α_2, α_3 et α_4 tels que

$$p_1 = \sum_{i=2}^{4} \alpha_i p_i$$

La solution est donnée par

$$\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} p_1^t p_2 \\ p_1^t p_3 \\ p_1^t p_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{\mu f_{11}^2} \begin{pmatrix} f_{11}^2 - f_{12}^2 & -f_{12} f_{13} & -f_{12} f_{14} \\ -f_{13} f_{12} & f_{11}^2 - f_{13}^2 & -f_{13} f_{14} \\ -f_{14} f_{12} & -f_{14} f_{13} & f_{11}^2 - f_{14}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{11} f_{12} \\ f_{11} f_{13} \\ f_{11} f_{14} \end{pmatrix}$$

Il vient

$$p_1 = \sum_{k=2}^{4} \frac{f_{1k}}{f_{11}} p_k \qquad f_{i1} = \sum_{k=2}^{4} \frac{f_{1k}}{f_{11}} f_{ik} \qquad 2 \leq i \leq 4$$

Par ailleurs, en notant

$$p_{ij} = \frac{\partial p_i}{\partial x_j} = \left(\frac{\partial f_{2i}}{\partial x_j}, \frac{\partial f_{3i}}{\partial x_j}, \frac{\partial f_{4i}}{\partial x_j} \right)^t$$

on peut écrire

$$\frac{\partial}{\partial x_k} (p_i^t p_j) = p_i^t \left(\frac{\partial p_j}{\partial x_k} \right) + p_j^t \left(\frac{\partial p_i}{\partial x_k} \right) = p_i^t p_{jk} + p_j^t p_{ik}$$

On peut déduire des équations (21) les relations, $2 \leq i,j \leq 4$, $p_{ij} = p_{ji}$,

$$p_i^t p_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} (f_{1i}^2 + \mu) \qquad p_j^t p_{ii} = \frac{\partial}{\partial x_i} (f_{1i} f_{1j}) - \frac{1}{2} (f_{1i}^2 + \mu) \qquad (i \neq j)$$

$$p_i^t p_{jk} + p_j^t p_{ik} = \frac{\partial}{\partial x_k} (f_{1i} f_{1j}) \qquad (i \neq j \neq k)$$

Cette dernière relation définie un système de trois équations à trois inconnues. Il est facilement inversible et on obtient

$$p_i^t p_{jk} = f_{1i}\frac{\partial f_{1j}}{\partial x_k} = f_{1i}\frac{\partial f_{1k}}{\partial x_j} \quad (i \neq j \neq k)$$

On peut chercher α_2^{ij}, α_3^{ij} et α_4^{ij} tels que

$$p_{ij} = \sum_{k=2}^{4} \alpha_k^{ij} p_k \qquad 2 \leq i, j \leq 4$$

La solution est donnée par

$$\begin{pmatrix} \alpha_2^{ij} \\ \alpha_3^{ij} \\ \alpha_4^{ij} \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} p_2^t p_{ij} \\ p_3^t p_{ij} \\ p_4^t p_{ij} \end{pmatrix}$$

Il résulte que les fonctions α_k^{ij}, $2 \leq i, j, k \leq 4$, dépendent uniquement de la fonction génératrice f_1. On peut écrire

$$p_{ij} = \sum_{k=2}^{4} \alpha_k^{ij} p_k \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial f_{li}}{\partial x_j} = \sum_{k=2}^{4} \alpha_k^{ij} f_{lk} \qquad 2 \leq i, j, l \leq 4$$

On peut mettre ces équations sous la forme

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\begin{pmatrix} f_{i2} \\ f_{i3} \\ f_{i4} \end{pmatrix} = A_j^f \begin{pmatrix} f_{i2} \\ f_{i3} \\ f_{i4} \end{pmatrix} \qquad A_j^f = \begin{pmatrix} \alpha_2^{2j} & \alpha_3^{2j} & \alpha_4^{2j} \\ \alpha_2^{3j} & \alpha_3^{3j} & \alpha_4^{3j} \\ \alpha_2^{4j} & \alpha_3^{4j} & \alpha_4^{4j} \end{pmatrix}$$

□

6.4 Matrice différentielle

Proposition 6.3. *Si f est élément de $\mathcal{N}$, F étant sa matrice différentielle, il existe une matrice carrée d'ordre trois M_f, à coefficients constants et orthogonale telle que $\epsilon = \dfrac{f_{11}}{|f_{11}|}$,*

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & M_f & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{12} & \epsilon\sqrt{\mu} + \dfrac{f_{12}^2}{f_{11}+\epsilon\sqrt{\mu}} & \dfrac{f_{13}f_{12}}{f_{11}+\epsilon\sqrt{\mu}} & \dfrac{f_{14}f_{12}}{f_{11}+\epsilon\sqrt{\mu}} \\ f_{13} & \dfrac{f_{12}f_{13}}{f_{11}+\epsilon\sqrt{\mu}} & \epsilon\sqrt{\mu} + \dfrac{f_{13}^2}{f_{11}+\epsilon\sqrt{\mu}} & \dfrac{f_{14}f_{13}}{f_{11}+\epsilon\sqrt{\mu}} \\ f_{14} & \dfrac{f_{12}f_{14}}{f_{11}+\epsilon\sqrt{\mu}} & \dfrac{f_{13}f_{14}}{f_{11}+\epsilon\sqrt{\mu}} & \epsilon\sqrt{\mu} + \dfrac{f_{14}^2}{f_{11}+\epsilon\sqrt{\mu}} \end{pmatrix}$$

Démonstration. En effet, il résulte de la formule 20 et de la proposition qui précède

$$\sum_{k=2}^{4} f_{ki}^2 = f_{1i}^2 + \mu \qquad \sum_{k=2}^{4} f_{ki}f_{kj} = f_{1i}f_{1j} \qquad f_{i1} = \sum_{k=2}^{4} \frac{f_{1k}}{f_{11}} f_{ik} \qquad \mu = f_{11}^2 - \sum_{k=2}^{4} f_{1k}^2 > 0$$

Supposons $f_{11} > 0$. On vérifie qu'une solution est définie par le système, $1 \leq i \neq j \leq 4$,

$$f_{ii} = \frac{\mu + f_{11}\sqrt{\mu} + f_{1i}^2}{f_{11}+\sqrt{\mu}} = \sqrt{\mu} + \frac{f_{1i}^2}{f_{11}+\sqrt{\mu}} \qquad f_{ij} = \frac{f_{1i}f_{1j}}{f_{11}+\sqrt{\mu}} \qquad f_{i1} = f_{1i}$$

En effet,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{4} f_{k2}^2 &= \frac{1}{(f_{11}+\sqrt{\mu})^2}\left\{(\mu+f_{11}\sqrt{\mu}+f_{12}^2)^2+(f_{12}f_{13})^2+(f_{12}f_{14})^2\right\}\\
&= \frac{1}{(f_{11}+\sqrt{\mu})^2}\left\{\mu^2+f_{11}^2\mu+f_{12}^4+2f_{11}\mu\sqrt{\mu}+2f_{11}f_{12}^2\sqrt{\mu}+2f_{12}^2\mu+f_{12}^2f_{13}^2+f_{12}^2f_{14}^2\right\}\\
&= \frac{1}{(f_{11}+\sqrt{\mu})^2}\left\{f_{12}^2(f_{12}^2+f_{13}^2+f_{14}^2+2f_{11}\sqrt{\mu}+2\mu)+f_{11}^2\mu+\mu^2+2f_{11}\mu\sqrt{\mu}\right\}\\
&= \frac{1}{(f_{11}+\sqrt{\mu})^2}\left\{f_{12}^2(f_{11}^2-\mu+2f_{11}\sqrt{\mu}+2\mu)+\mu(f_{11}^2+\mu+2f_{11}\sqrt{\mu})\right\}\\
&= \frac{1}{(f_{11}+\sqrt{\mu})^2}\left\{f_{12}^2(f_{11}+\sqrt{\mu})^2+\mu(f_{11}+\sqrt{\mu})^2\right\}\\
&= f_{12}^2+\mu
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{4} f_{k2}f_{k3} &= \frac{1}{(f_{11}+\sqrt{\mu})^2}\left\{(\mu+f_{11}\sqrt{\mu}+f_{12}^2)(f_{12}f_{13})+(\mu+f_{11}\sqrt{\mu}+f_{13}^2)(f_{12}f_{13})+f_{12}f_{13}f_{14}^2\right\}\\
&= \frac{1}{(f_{11}+\sqrt{\mu})^2}\left\{(2\mu+2f_{11}\sqrt{\mu}+f_{12}^2+f_{13}^2+f_{14}^2)\right\}f_{12}f_{13}\\
&= \frac{1}{(f_{11}+\sqrt{\mu})^2}\left\{(2\mu+2f_{11}\sqrt{\mu}+f_{11}^2-\mu)\right\}f_{12}f_{13}\\
&= f_{12}f_{13}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{21} &= \frac{1}{(f_{11}+\sqrt{\mu})}\left\{\frac{f_{12}}{f_{11}}(\mu+f_{11}\sqrt{\mu}+f_{12}^2)+\frac{f_{13}}{f_{11}}(f_{12}f_{13})+\frac{f_{14}}{f_{11}}(f_{12}f_{14})\right\}\\
&= \frac{f_{12}}{f_{11}(f_{11}+\sqrt{\mu})}\left\{(\mu+f_{11}\sqrt{\mu}+f_{12}^2+f_{13}^2+f_{14}^2)\right\}\\
&= \frac{f_{12}}{f_{11}(f_{11}+\sqrt{\mu})}\left\{(\mu+f_{11}\sqrt{\mu}+f_{11}^2-\mu)\right\}\\
&= f_{12}
\end{aligned}$$

Par ailleurs, on verra au paragraphe suivant que si g et h sont deux éléments de $\mathcal{N}$ tels qu'on ait la relation

$$h_1 = \lambda g_1 + \eta \qquad (\lambda,\eta)\in\mathbb{R}^2 \qquad \lambda\neq 0$$

alors il existe une matrice carrée et orthogonale d'ordre trois M, à coefficients constants, telle que G et H étant les matrices différentielles de g et h, on ait l'égalité

$$HG^{-1} = \lambda\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&&&\\0&&\mathrm{M}&\\0&&&\end{pmatrix}$$

Ainsi, le signe de f_{11} pouvant être négatif, si g est un élément de $\mathcal{N}$ tel que $g_1 = \dfrac{f_{11}}{|f_{11}|} = \epsilon f_1$, sa matrice différentielle étant déterminée par les formules explicites ci-dessus, il existe une matrice scalaire orthogonale M telle que

$$F = \epsilon\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&&&\\0&&M_f&\\0&&&\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\epsilon f_{11} & \epsilon f_{12} & \epsilon f_{13} & \epsilon f_{14}\\ \epsilon f_{12} & \sqrt{\mu}+\dfrac{f_{12}^2}{\epsilon f_{11}+\sqrt{\mu}} & \dfrac{f_{13}f_{12}}{\epsilon f_{11}+\sqrt{\mu}} & \dfrac{f_{14}f_{12}}{\epsilon f_{11}+\sqrt{\mu}}\\ \epsilon f_{13} & \dfrac{f_{12}f_{13}}{\epsilon f_{11}+\sqrt{\mu}} & \sqrt{\mu}+\dfrac{f_{13}^2}{\epsilon f_{11}+\sqrt{\mu}} & \dfrac{f_{14}f_{13}}{\epsilon f_{11}+\sqrt{\mu}}\\ \epsilon f_{14} & \dfrac{f_{12}f_{14}}{\epsilon f_{11}+\sqrt{\mu}} & \dfrac{f_{13}f_{14}}{\epsilon f_{11}+\sqrt{\mu}} & \sqrt{\mu}+\dfrac{f_{14}^2}{\epsilon f_{11}+\sqrt{\mu}}\end{pmatrix}$$

□

Le calcul donne

$$F^{-1} = \frac{1}{\mu}\begin{pmatrix} f_{11} & -f_{12} & -f_{13} & -f_{14} \\ -f_{12} & \epsilon\sqrt{\mu} + \dfrac{f_{12}^2}{f_{11}+\epsilon\sqrt{\mu}} & \dfrac{f_{13}f_{12}}{f_{11}+\epsilon\sqrt{\mu}} & \dfrac{f_{14}f_{12}}{f_{11}+\epsilon\sqrt{\mu}} \\ -f_{13} & \dfrac{f_{12}f_{13}}{f_{11}+\epsilon\sqrt{\mu}} & \epsilon\sqrt{\mu} + \dfrac{f_{13}^2}{f_{11}+\epsilon\sqrt{\mu}} & \dfrac{f_{14}f_{13}}{f_{11}+\epsilon\sqrt{\mu}} \\ -f_{14} & \dfrac{f_{12}f_{14}}{f_{11}+\epsilon\sqrt{\mu}} & \dfrac{f_{13}f_{14}}{f_{11}+\epsilon\sqrt{\mu}} & \epsilon\sqrt{\mu} + \dfrac{f_{14}^2}{f_{11}+\epsilon\sqrt{\mu}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & M_f^{-1} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

On peut noter

$$\bar{\nabla} f_1 = \begin{pmatrix} f_{12} \\ f_{13} \\ f_{14} \end{pmatrix}$$

Sachant que $M_f^{-1} = M_f^t$, $<,>$ étant le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^3$,

$$F(x) = F_x\left(M_f, \frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \bar{\nabla} f_1\right) \qquad F^{-1}\left(f(x)\right) = F_x\left(M_f^{-1}, \frac{1}{\mu_f}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}, -\frac{1}{\mu_f} M_f \bar{\nabla} f_1\right) \tag{24}$$

$$\mu_f = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)^2 - < \bar{\nabla} f_1, \bar{\nabla} f_1 >$$

6.5 Notion de d'observateur

Définition 6.1. *Un observateur est un système de coordonnées cartésien de l'espace-temps qui tel que les coordonnées spatiales soient relatives à une base orthonormée.*

Ainsi, toute transformation admissible est de la forme $S' \circ S^{-1}$ où S' et S sont deux observateurs.

Définition 6.2. *Une transformation admissible sera dite interne si et seulement si elle peut s'écrire $S' \circ S^{-1}$ où S et S' sont deux observateurs appartenant au même référentiel.*

La transformation admissible f est interne si et seulement si il existe un réel λ dont la valeur absolue caractérise le choix de l'étalon des longueurs et dont le signe caractérise le choix de la représentation de la succession des instants, tel que x et y étant deux quelconques éléments de $\mathbb{R}^4$,

$$f_1(y) - f_1(x) = \lambda(y_1 - x_1) \qquad \sum_{i=2}^{4}(f_i(y) - f_i(x))^2 = \lambda^2 \sum_{i=2}^{4}(y_i - x_i)^2$$

Proposition 6.4. *Une transformation admissible f est interne si et seulement si il existe un réel λ tel que, x et y étant deux quelconques éléments de $\mathbb{R}^4$,*

$$f_1(y) - f_1(x) = \lambda(y_1 - x_1)$$

Démonstration. Nécessairement, on a les égalités

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) = \lambda \qquad \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(x) = 0 \qquad 2 \leq i \leq 4$$

La proposition 6.3 permet de conclure. □

Si f et g sont deux transformation admissibles telles que $f \circ g^{-1}$ soit interne, alors S étant un quelconque observateur, $f \circ S$ et $g \circ S$ appartiennent au même référentiel. La proposition qui précède signifie qu'il existe un réel non nul λ et un réel α tels que

$$g_1 = \lambda f_1 + \alpha$$

7 Géométrie d'un espace-temps en mouvement

7.1 Dynamique d'un référentiel en mouvement

$\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ sont deux référentiels qui ont pour supports des particules élémentaires situées [12] aux points O_r et $O_{r'}$ de leurs espaces. S est un quelconque observateur de $\mathcal{R}$ tel que l'élément O_s de $\mathcal{E}_r$ soit l'origine de son repère d'espace, et $S'_{r'}$ est un observateur de $\mathcal{R}'$ tel que $O_{r'}$ soit l'origine de son repère d'espace. On note

$$f^r = S'_{r'} \circ S^{-1} \qquad f^r(\tau, x_2, x_3, x_4) = (\tau', x'_2, x'_3, x'_4)$$

À la date $\dfrac{\tau}{c}$ dans S , $O_{r'}$ a pour coordonnées $(x_2^{r'}(\tau), x_3^{r'}(\tau), x_4^{r'}(\tau))$ et on note $\tilde{M}(\tau)$ et $\hat{M}(\tau)$ les éléments de $\mathcal{E}_r$ ayant pour coordonnées

$$(\tilde{x}_i + x_i^{r'}(\tau))_{2\leq i\leq 4} \qquad (\hat{x}_i + x_i^{r'}(\tau))_{2\leq i\leq 4}$$

La structure affine de $\mathcal{R}$ translatée au point $O_{r'}(\tau)$ est l'application $\mathcal{T}_r^{O_{r'}(\tau)}$ telle que, α et β étant deux quelconques réels, les coordonnées dans S de $\mathcal{T}_r^{O_{r'}(\tau)}(\alpha, \beta, \tilde{M}(\tau), \hat{M}(\tau))$ s'écrivent

$$(\alpha\tilde{x}_i + \beta\hat{x}_i + x_i^{r'}(\tau))_{2\leq i\leq 4} \tag{25}$$

Par définition, les coordonnées dans S de $\mathcal{D}^{\tau}_{r,r'}(\alpha, \beta, \tilde{M}(\tau), \hat{M}(\tau))$ s'écrivent

$$(\bar{x}_j + x_j^{r'}(\tau))_{2\leq j\leq 4} \tag{26}$$

$$f_i^r\left(\tau, (\bar{x}_j + x_j^{r'}(\tau))_{2\leq j\leq 4}\right) = \alpha f_i^r\left(\tau, (\tilde{x}_j + x_j^{r'}(\tau))_{2\leq j\leq 4}\right) + \beta f_i^r\left(\tau, (\hat{x}_j + x_j^{r'}(\tau))_{2\leq j\leq 4}\right)$$

On peut se demander si l'hypothèse 2 qui énonce l'identité de $\mathcal{D}^{\tau}_{r^s,r'}$ et $\mathcal{T}_{r^s}^{O_{r'}(\tau)}$ est compatible avec les transformations admissibles. Précisons le cas de la transformation de Lorentz. On sait que f est affine et que quelque soit le réel τ,

$$f_i^r\left(\tau, (x_j^{r'}(\tau))_{2\leq i\leq 4}\right) = 0 \qquad 2 \leq i \leq 4$$

Nécessairement,

$$\sum_{j=2}^{4} f_{ij}^r \bar{x}_j = \sum_{j=2}^{4} f_{ij}^r(\alpha\tilde{x}_j + \beta\hat{x}_j)$$

D étant la matrice définie à l'équation (23), $(f_{ij})_{ij}$ est telle qu'en la multipliant à gauche par sa transposée on obtienne D^{-1}. Il résulte

$$\bar{x}_j = \alpha\tilde{x}_j + \beta\hat{x}_j \qquad 2 \leq i \leq 4$$

Ainsi, (25) et (26) sont identiques. On sait que

$$\left(\mathcal{E}_r, \mathcal{T}_r^{O_{r'}(\tau)}\right) \qquad \left(\mathcal{E}_r, \mathcal{D}^{\tau}_{r,r'}\right)$$

ont chacun une structure d'espace eucludien, le produit scalaire dont est muni le premier étant $<,>_r$ et celui dont est muni le second étant $<,>_{r'}$. D'après le théorème de représentation des produits scalaires sur un espace vectoriel présenté à l'annexe du document, il existe un automorphisme $P^{\tau}_{r,r'}$ tel que

$$< . , . >_{r'} = < P^{\tau}_{r,r'}(.), P^{\tau}_{r,r'}(.) >_r$$

$$< \varphi_{r'}(O_{r'}, M'), \varphi_{r'}(O_{r'}, N') >_{r'} = < P^{\tau}_{r,r'}\varphi_r(O_{r'}(\tau), M'(\tau)), P^{\tau}_{r,r'}\varphi_r(O_{r'}(\tau), N'(\tau)) >_r$$

D'après $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}'$ utilise un autre produit scalaire pour se représenter l'espace et ce résultat est conforme au paragraphe 4.3.4.

12. Si ces particules sont électriquement chargées, il s'agit des points où se trouvent leurs charges.

7.2 Mouvement dans $\mathcal{R}$ d'un élément de $\mathcal{E}_{r'}$

S et S' sont deux observateurs appartenant aux référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$, relatifs aux origines O_s et $O_{s'}$ et aux bases orthonormées $\mathcal{B}_s = (\vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$ et $\mathcal{B}_{s'} = (\vec{e}'_2, \vec{e}'_3, \vec{e}'_4)$. On note

$$f = S' \circ S^{-1} \qquad \vec{\nabla} f_1 = \sum_{i=2}^{4} \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \vec{e}_i$$

Soit M' est élément de $\mathcal{E}_{r'}$ et (x', y', z') sont ses coordonnées dans S'. À la date $\dfrac{\tau}{c}$ dans S, $M'(\tau)$ a pour coordonnées $(x(\tau), y(\tau), z(\tau))$ et on peut noter

$$\tau'(M'(\tau)) = f_1(\tau, x(\tau), y(\tau), z(\tau)) \qquad \frac{dx'}{d\tau}\vec{e}'_2 + \frac{dy'}{d\tau}\vec{e}'_3 + \frac{dz'}{d\tau}\vec{e}'_4 = \vec{0}$$

La proposition 6.3 permet d'écrire

$$\vec{\nabla} f_1 + \epsilon\sqrt{\mu}\ \frac{d}{d\tau}\varphi_r(O_s, M'(\tau)) + < \vec{\nabla} f_1, \frac{d}{d\tau}\varphi_r(O_s, M'(\tau)) >_r \frac{\vec{\nabla} f_1}{f_{11} + \epsilon\sqrt{\mu}} = \vec{0}$$

En effectuant le produit scalaire de chaque membre de cette égalité par $\vec{\nabla} f_1$,

$$< \vec{\nabla} f_1, \frac{d}{d\tau}\varphi_r(O_s, M'(\tau)) >_r = \frac{-1}{f_{11}} < \vec{\nabla} f_1, \vec{\nabla} f_1 >_r = \frac{\mu - f_{11}^2}{f_{11}}$$

Il résulte

$$\frac{d}{d\tau}\varphi_r(O_s, M'(\tau)) = -\frac{\vec{\nabla} f_1}{f_{11}} \tag{27}$$

Ainsi, $\mathcal{R}$ constate que le vecteur vitesse en un évènement κ d'un point matériel qui s'y trouve et qui est continûment immobile dans $\mathcal{R}'$ est orthogonale à la surface spatiale définie par les évènements simultanés à κ dans $\mathcal{R}'$ et dans $\mathcal{R}$.

7.3 Géométrie des droites en mouvement

Une des représentations vectorielles les plus simples d'une droite $\mathcal{D}'$ de $\mathcal{R}'$ est

$$\varphi_{r'}(O_{s'}, M'_\eta) = \eta\ \vec{e}' + \varphi_{r'}(O_{s'}, M'_{\eta_0}) \qquad \eta \in \mathbb{R} \qquad (\vec{e}', \varphi_{r'}(O_{s'}, M'_{\eta_0})) \in \mathcal{V}^2_{r'} \tag{28}$$

On recherche l'équation de $\mathcal{D}'$ dans $\mathcal{R}$ à la date $\dfrac{\tau}{c}$. Considérons n phénomènes qui se produisent aux points $\mathcal{O}_n = \{\eta_i, 1 \le i \le n\}$ de $\mathcal{D}'$. Ils se produisent aux évènements décrits dans $\mathcal{R}$ par

$$\Big\{(\tau_i, M'_{\eta_i}(\tau_i)), 1 \le i \le n\Big\}$$

et dans $\mathcal{R}'$ par

$$\Big\{f(\tau_i, M'_{\eta_i}(\tau_i)), 1 \le i \le n\Big\} = \Big\{(\tau'_i, M'_{\eta_i}), 1 \le i \le n\Big\}$$

Si $(\eta_i, \eta_j) \in \mathcal{O}_n^2$, $i \ne j$, les expressions

$$\frac{\varphi_r(O_s, M'_{\eta_i}(\tau_i)) - \varphi_r(O_s, M'_{\eta_j}(\tau_j))}{\eta_i - \eta_j} \qquad \frac{\varphi_{r'}(O_{s'}, M'_{\eta_i}) - \varphi_{r'}(O_{s'}, M'_{\eta_j})}{\eta_i - \eta_j}$$

ont un sens et définissent des éléments de $\mathcal{V}_r$ et $\mathcal{V}_{r'}$. En substituant à $\mathcal{O}_n$ un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}$, la proposition 6.3 permet d'écrire

$$\begin{aligned}
\frac{d\tau'}{d\eta} &= f_{11}\frac{d\tau}{d\eta} + < \vec{\nabla} f_1, \frac{d}{d\eta}\varphi_r(O_s, M'_\eta(\tau_\eta)) >_r \\
\epsilon\pi_{s',s}A_{s',s}\frac{d}{d\eta}\varphi_{r'}(O_{s'}, M'_\eta) &= \frac{d\tau}{d\eta}\vec{\nabla} f_1 + \epsilon\sqrt{\mu}\ \frac{d}{d\eta}\varphi_r(O_s, M'_\eta(\tau_\eta)) \\
&\quad + < \vec{\nabla} f_1, \frac{d}{d\eta}\varphi_r(O_s, M'_\eta(\tau_\eta)) >_s \frac{\vec{\nabla} f_1}{f_{11} + \epsilon\sqrt{\mu}}
\end{aligned}$$

$\pi_{s',s}$ est la bijection linéaire définie sur $\mathcal{V}_{r'}$ et à valeurs dans $\mathcal{V}_r$ par la relation

$$\pi_{s',s}\left(x'\vec{e}'_2 + y'\vec{e}'_3 + z'\vec{e}'_4\right) = x\vec{e}_2 + y\vec{e}_3 + z\vec{e}_4$$

$A_{s',s}$ est l'isométrie de $\mathcal{V}_{r'}$ dont la matrice représentative dans la base $\mathcal{B}_s$ est ϵM_f^{-1}. Ces relations restent exactes si on substitue à η la variable $h(\eta)$ où h est une quelconque fonction bijective et dérivable. Si ces phénomènes se produisent simultanément dans $\mathcal{R}$,

$$\frac{d\tau}{d\eta} = 0 \qquad \frac{d}{d\eta}\varphi_{s'}(O_{s'}, \tilde{r}_\eta) = \vec{e}'$$

En notant $\epsilon\pi_{s,s'}\left(A_{s',s}\ \vec{e}'\right) = \vec{e}$, on peut établir

$$< \vec{\nabla} f_1, \frac{d}{d\eta}\varphi_r(O_s, M'_\eta(\tau)) >_r = \frac{1}{f_{11}} < \vec{\nabla} f_1, \vec{e} >_r$$

$$\frac{d}{d\eta}\varphi_r(O_s, M'_\eta(\tau)) = \frac{1}{\epsilon\sqrt{\mu}}\left(\vec{e} - < \vec{\nabla} f_1, \vec{e} >_s \frac{\vec{\nabla} f_1}{f_{11}(f_{11} + \epsilon\sqrt{\mu})}\right) \tag{29}$$

f_{11} et $\vec{\nabla} f_1$ étant évalués en $(\tau, M'_\eta(\tau))$. On doit associer à cette équation la relation 27.

$$< \vec{e}, \vec{e} >_r = 1 \implies < \vec{e}', \vec{e}' >_{r'} = 1$$

Sous cette condition, la mesure dans $\mathcal{R}$ du segment de droite de $\mathcal{D}'$ qui a pour extrémités M'_{η_1} et M'_{η_2} est $|\eta_2 - \eta_1|$.

8 Réalisation d'un référentiel

La description du mouvement d'un référentiel relativement à un autre par des vecteurs vitesses instantannés de rotation et de translation est une conséquence de l'hypothèse 1 qui est remise en cause par la pertinente transformation de Lorentz. Il faut repenser la caractérisation d'un système accéléré.

$\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ sont deux référentiels tels que la trajectoire de la particule élémentaire support du second soit connue dans le premier. Comment sait-on qu'une transformation admissible réalisée entre leurs observateurs est affine ? Comment $\mathcal{R}$ peut-il deviner les trajectoires des entités qui parraissent immobiles pour le physicien qu'est la particule support de $\mathcal{R}'$?

8.1 Approche naïve

On peut se rendre compte de l'incompatibilité entre l'hypothèse 1 et la transformation de Lorentz de deux manières.

D'une part, si on suppose que la particule support de $\mathcal{R}'$ ne subie une accélération non nulle dans $\mathcal{R}$ que pendant une durée finie, cette accélération modifiant le module de sa vitesse, alors le phénomène de contraction des longueurs de Lorentz indique que la distance spatiale constatée dans $\mathcal{R}$ entre deux particules immobiles dans $\mathcal{R}'$ subie une modification au voisinage de la période de transition.

Par ailleurs, l'hypothèse 1 affirme que deux particules élémentaires ayant à tout instant le même vecteur vitesse dans un référentiel $\mathcal{R}$ sont immobiles dans un unique référentiel $\mathcal{R}^0$. Si le vecteur d'espace constant qu'ils définissent n'est pas orthogonal à une direction $\vec{e}$ et si leur vecteur vitesse est une fonction croissante et non constante du temps, alors $\mathcal{R}'$ étant en translation uniforme dans la direction $\vec{e}$ dans $\mathcal{R}$, la transformation de Lorentz indique que leurs vecteurs vitesses ne peuvent y être simultanément égaux à toute date. En effet, l'application qui associe au vecteur vitesse $\vec{u}$ dans $\mathcal{R}$ d'un point matériel en un évènement κ, son vecteur vitesse $\vec{u}'$ constaté dans $\mathcal{R}'$, ne dépend pas du choix de κ mais uniquement de la vitesse de $\mathcal{R}'$ dans $\mathcal{R}$. Ainsi, si ces particules émettent régulièrement et simultanément dans $\mathcal{R}$ des signaux indiquant leur vitesse commune, parce que la droite qu'elles définissent n'appartient pas à un plan affine orthogonal à $\vec{e}$, ces émissions ne peuvent être simultanées dans $\mathcal{R}'$ où elles indiquent les mêmes vitesses.

8.2 Concept d'immobilité

Proposition 8.1. *Relativement à un quelconque référentiel $\mathcal{R}$, la sphère électrique crée à une date donnée par une charge M est toujours strictement incluse dans toute sphère crée à une date antérieure et chacune d'elles ne rencontre un quelconque point matériel N qu'en un unique évènement.*

Démonstration. Pour prouver la seconde affirmation il suffit de montrer, O étant un quelconque élément de $\mathcal{E}_r$, que quelques soient $\epsilon \in \{-1, 1\}$ et la date $\frac{\tau}{c}$, il existe un unique élément $\vec{\xi}_M(\tau, N)$ de $\mathcal{V}_r$ tel que

$$\varphi_r(O, N(\tau + \epsilon\|\vec{\xi}_M(\tau, N)\|_r)) = \vec{\xi}_M(\tau, N) + \varphi_r\left(O, M(\tau)\right) \tag{30}$$

En effet, le module de la vitesse moyenne de N entre deux dates quelconques est égale à celui de sa vitesse à une date intermédiaire d'après le théorème des accroissement finis et par conséquent est inférieur à c. On peut écrire, si $\vec{\xi}_1(\tau, N)$ et $\vec{\xi}_2(\tau, N)$ satisfont la relation qui précède,

$$\begin{aligned}
\|\vec{\xi}_2(\tau, N) - \vec{\xi}_1(\tau, N)\|_r &= \|\varphi_r(O, N(\tau + \epsilon\|\vec{\xi}_2(\tau, N)\|_r)) - \varphi_r(O, N(\tau + \epsilon\|\vec{\xi}_1(\tau, N)\|_r))\|_r \\
&= \|\varphi_r(N(\tau + \epsilon\|\vec{\xi}_2(\tau, N)\|_r), N(\tau + \epsilon\|\vec{\xi}_1(\tau, N)\|_r))\|_r \\
&< \left|\|\vec{\xi}_2(\tau, N)\|_r - \|\vec{\xi}_1(\tau, N)\|_r\right|
\end{aligned}$$

Par ailleurs, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\|\vec{\xi}_2(\tau, N) - \vec{\xi}_1(\tau, N)\|_r \geq \left|\|\vec{\xi}_2(\tau, N)\|_r - \|\vec{\xi}_1(\tau, N)\|_r\right|$$

La sphère électrique générée par M à la date $\frac{\tau}{c}$ rencontre N uniquement à la date $\frac{\tau^+}{c}$ ultérieure,

$$|\tau^+ - \tau| = \|\vec{\xi}_M(\tau, N)\|_r$$

La première affirmation peut être prouvée ainsi : si deux sphère électriques émises aux dates $\frac{\tau_1}{c}$ et $\frac{\tau_2}{c}$ par M se rencontrent à une date ultérieure τ et en un point H, alors

$$|\ |\tau - \tau_2| - |\tau - \tau_1|\ | = |\epsilon(\tau - \tau_2) - \epsilon(\tau - \tau_1)| = |(\tau - \tau_2) - (\tau - \tau_1)| = |\tau_2 - \tau_1|$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
|\ |\tau - \tau_2| - |\tau - \tau_1|\ | &= |\|\varphi_r(M(\tau_2), H)\|_r - \|\varphi_r(M(\tau_1), H)\|_r| \\
&\leq \|\varphi_r(M(\tau_2), H) - \varphi_r(M(\tau_1), H)\|_r \\
&\leq \|\varphi_r(M(\tau_1), M(\tau_2))\|_r \\
&< |\tau_2 - \tau_1|
\end{aligned}$$

□

Une transformation admissible est entièrement déterminée par sa fonction génératrice ce qui signifie que la définition d'un changement de référentiel nécessite uniquement la précision des dates que le nouvel observateur attribue aux différents évènements et dans cet objectif, le postulat 11 qui confère cette propriété aux transformations d'espace et de temps est fructueux.

$\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ sont deux référentiels munis des observateurs S et S', et la trajectoire dans S du support $\mathcal{P}'$ de $\mathcal{R}'$ est notée

$$(\tau, x_2(\tau), x_3(\tau), x_4(\tau))$$

On pose $f = S' \circ S^{-1}$ et S souhaite savoir quelle date S' attribue à l'évènement κ de coordonnées (τ, x_2, x_3, x_4). Supposons connue dans S la date indiquée par l'horloge que constitue $\mathcal{P}'$, c'est à dire la fonction

$$h(\tau) = f_1(\tau, x_2(\tau), x_3(\tau), x_4(\tau)) \tag{31}$$

Si une sphère électrique est générée par $\mathcal{P}'$ à la date $\frac{\tau_-}{c}$ dans S, choisie de sorte que κ soit élément de sa trajectoire, et si une seconde sphère générée en κ rencontre $\mathcal{P}'$ à la date $\frac{\tau_+}{c}$, alors

le fait que la vitesse de croissance des rayons de ces sphères ne dépende que des choix des étalons dans $\mathcal{R}$ comme dans $\mathcal{R}'$ et que $\mathcal{P}'$ soit immobile dans son propre référentiel implique la relation

$$f_1(\tau, x_2, x_3, x_4) - h(\tau_-) = h(\tau_+) - f_1(\tau, x_2, x_3, x_4)$$
$$f_1(\tau, x_2, x_3, x_4) = \frac{h(\tau_+) + h(\tau_-)}{2} \tag{32}$$

La proposition 8.1 signifie que les scalaires τ_- et τ_+ sont uniquement déterminés si le module de la vitesse de $\mathcal{P}'$ dans $\mathcal{R}$ est toujours inférieur à c, et leur précision est possible si la trajectoire de $\mathcal{P}'$ est prévisible comme dans le cas d'un mouvement périodique. On a les relations

$$(\tau - \tau_-)^2 = \sum_{i=2}^{4}(x_i(\tau_-) - x_i)^2 \qquad (\tau_+ - \tau)^2 = \sum_{i=2}^{4}(x_i(\tau_+) - x_i)^2 \tag{33}$$

Si la graduation de l'axe temporelle est normale dans $\mathcal{R}$, alors $\tau_- \leq \tau$ et $\tau_+ \geq \tau$, et ces inégalités sont inversées sinon. On peut noter M et $O_{r'}(\tau)$ les éléments de $\mathcal{E}_r$ dont les coordonnées dans S sont

$$(x_2, x_3, x_4) \qquad (x_2(\tau), x_3(\tau), x_4(\tau))$$

On peut poser

$$\tau - \tau_- = \|\varphi_r(M, O_{r'}(\tau_-))\|_r \qquad \tau_+ - \tau = \|\varphi_r(M, O_{r'}(\tau_+))\|_r \qquad \frac{\vec{v}_{p'}(\tau)}{c} = \frac{d}{d\tau}\varphi_r(O_s, O_{r'}(\tau))$$

Il vient

$$\begin{aligned} \epsilon\vec{\nabla}\tau_\epsilon &= -\frac{\varphi_r(M, O_{r'}(\tau_\epsilon))}{\|\varphi_r(M, O_{r'}(\tau_\epsilon))\|_r} + \vec{\nabla}\tau_\epsilon \frac{< \vec{v}_{p'}(\tau_\epsilon), \varphi_r(M, O_{r'}(\tau_\epsilon)) >_r}{\|\varphi_r(M, O_{r'}(\tau_\epsilon))\|_r} \\ \epsilon(\frac{d\tau_\epsilon}{d\tau} - 1) &= \frac{d\tau_\epsilon}{d\tau} \frac{< \vec{v}_{p'}(\tau_\epsilon), \varphi_r(M, O_{r'}(\tau_\epsilon)) >_r}{\|\varphi_r(M, O_{r'}(\tau_\epsilon))\|_r} \end{aligned}$$

Il vient

$$\vec{\nabla}\tau_\epsilon = -\epsilon \frac{\varphi_r(M, O_{r'}(\tau_\epsilon))}{\|\varphi_r(M, O_{r'}(\tau_\epsilon))\|_r - \epsilon < \vec{v}_{p'}(\tau_\epsilon), \varphi_r(M, O_{r'}(\tau_\epsilon)) >_r} \tag{34}$$

$$\frac{d\tau_\epsilon}{d\tau} = \frac{\|\varphi_r(M, O_{r'}(\tau_\epsilon))\|_r}{\|\varphi_r(M, O_{r'}(\tau_\epsilon))\|_r - \epsilon < \vec{v}_{p'}(\tau_\epsilon), \varphi_r(M, O_{r'}(\tau_\epsilon)) >_r} \tag{35}$$

L'équations (27) s'écrit, M' étant l'élément de $\mathcal{E}_{r'}$ tel que $M'(\tau) = M$, h' étant la dérivée de h,

$$\frac{d}{d\tau}\varphi_r(O_s, M'(\tau)) = \frac{\vec{\nabla}\tau_+ h'(\tau_+) + \vec{\nabla}\tau_- h'(\tau_-)}{\frac{d\tau_+}{d\tau}h'(\tau_+) + \frac{d\tau_-}{d\tau}h'(\tau_-)} \tag{36}$$

La connaissance de la transformation de Lorentz permet d'affirmer que si $\vec{v}_{p'}$ est un vecteur constant et si (en conséquence) la fonction h est affine, l'équation (36) permet de retrouver $\vec{v}_{p'}$ lorsque $M' = O_{r'}$. On doit retrouver cette identité si $\vec{v}_{p'}$ est une quelconque fonction du temps. Par ailleurs, l'équation (2) indique que la fonction h, qui est suffisante pour la précision de l'application f d'après l'équation (32), est déterminée à une transformation affine près.

Dans un but pédagogique, établissons une identité liée à h. On peut déduire de (31) la relation

$$\frac{dh}{d\tau} = (f_{11} + < \vec{\nabla} f_1, \frac{\vec{v}_{p'}}{c} >_r) = f_{11}(1 - \frac{< \vec{v}_{p'}, \vec{v}_{p'} >_r}{c^2})$$

Nécessairement, si $\tau = h^{-1}(\tau')$,

$$\frac{d\tau}{d\tau'} = \frac{1}{f_{11}}(1 - \frac{< \vec{v}_{p'}, \vec{v}_{p'} >_r}{c^2})^{-1}$$

Par ailleurs, si $g = f^{-1}$, $\mathcal{P}'$ étant immobile dans $\mathcal{R}'$, on a la relation

$$\frac{d\tau}{d\tau'} = g_{11}$$

Les deux égalités qui précèdent sont compatibles car on peut déduire de (24) la relation

$$g_{11} = \frac{f_{11}}{\mu_f} \qquad \mu_f = (f_{11}^2 - < \vec{\nabla} f_1, \vec{\nabla} f_1 >_r) = f_{11}^2(1 - \frac{< \vec{v}_{p'}, \vec{v}_{p'} >_r}{c^2})$$

8.3 Un principe variationnel

Nous n'avons toujours pas indiqué comment déterminer la fonction h qui correspond à la mesure $\varsigma_{r'}$ définie au postulat 4, cette mesure étant nécessaire pour la mise en évidence [13] du concept de durée car une quelconque fonction strictement monotone est suffisante pour paramétrer l'ensemble des classes d'équivalence définie dans $\mathcal{R}'$ par la notion de simultanéité entre les évènements.

Il résulte de la transformation de Lorentz que si $\vec{v}_{p'}$ est un vecteur constant, h est affine et sa dérivée a pour valeur $\epsilon_r \epsilon_{r'} \gamma_{v_{p'}}$ si les étalons des longueurs sont identiques dans $\mathcal{R}$ et dans $\mathcal{R}'$. On est tenté d'affirmer que lorsque $\vec{v}_{p'}$ est une quelconque fonction du temps, la valeur de sa dérivée peut être choisie identique à l'expresion qui précède si elles sont évalués à la même date. Il est pourtant réaliste de supposer que $\dfrac{dh}{d\tau}(\tau)$ dépend au minimum de $\vec{v}_{p'}(\tau)$ et de $\dfrac{d\vec{v}_{p'}}{d\tau}(\tau)$. En effet, d'après le théorème des accroissements finis, la vitesse moyenne de $\mathcal{P}'$ entre les dates successives τ et $\tau + d\tau$ n'est pas $\vec{v}_{p'}(\tau)$ mais est égale à

$$\vec{v}_{p'}(\tau) + \frac{1}{2}\frac{d\vec{v}_{p'}}{d\tau}(d\tau + \xi d\tau)d\tau \qquad \xi \in]0,1[$$

Si deux particules élémentaires ont à la date $\dfrac{\tau}{c}$ les mêmes vecteurs vitesses et accélérations, alors leurs fonctions vecteurs vitesses sont identiques entre les dates successives τ_1 et τ_2 si la durée qu'elles définissent est infinitésimale, et on peut déduire du postulat 7 que les durées des temps propres écoulées au sein de ces particules sont équivalentes. Il est légitime de noter

$$\frac{dh}{d\tau}(\tau) = \zeta(\vec{v}_{p'}(\tau), \frac{d\vec{v}_{p'}}{d\tau}(\tau)) \qquad \zeta = \zeta(v_2, v_3, v_4, w_2, w_3, w_4)$$

La trajectoire de $\mathcal{P}'$ dans un système de coordonnées cartésien S de $\mathcal{R}$ étant paramétrée comme au paragraphe précédent, on peut l'exprimer en termes d'évènements. Entre les dates successives $\dfrac{\tau_1}{c}$ et $\dfrac{\tau_2}{c}$ dans $\mathcal{R}$, elle est définie par l'ensemble

$$\{S^{-1}(\tau, x_2(\tau), x_3(\tau), x_4(\tau)) \ , \ \epsilon\tau_1 \leq \tau \leq \epsilon\tau_2\}$$

Une trajectoire virtuelle associée de $\mathcal{P}'$ est un ensemble d'évènements décrits dans S par les relations, $i \in \{1,2\}$, $j \in \{2,3,4\}$,

$$\{(\tau, y_2(\tau), y_3(\tau), y_4(\tau)) \ , \ \epsilon\tau_1 \leq \tau \leq \epsilon\tau_2\} \qquad y_j(\tau_i) = x_j(\tau_i) \qquad \frac{dy_j}{d\tau}(\tau_i) = \frac{dx_j}{d\tau}(\tau_i)$$

La structure de l'équation (9) indique que cet ensemble ne dépend pas du référentiel $\mathcal{R}$.

Postulat 12. *(Le principe de moindre action) La durée écoulée sur l'horloge que constitue une particule élémentaire entre deux évènements qu'elle occupe rend stationnaire la trajectoire qu'elle décrit dans un quelconque référentiel.*

9 Interaction entre deux particules élémentaires chargées

Une charge immobile q génère un champ électrique et cette même charge en mouvement crée en plus un champ magnétique qui est une nouvelle entité physique car contrairement au précédent, la trajectoire d'une charge test qui y est plongée dépend de façon appréciable de sa vitesse initiale qui ne variera pas en module. Ainsi, le mouvement de q modifie de façon radicale la nature de ses propriétés interactives.

D'un point de vue purement mathématique, il est cohérent de supposer que tous les référentiels sont coulombiens, que toute entité dans l'univers est constituée d'un certain nombre de particules élémentaires électriquement chargées ou électriquement neutres, et que tout atome est une agrégation stable d'un certain nombre de ces particules. Alors nécessairement, relativement à un quelconque référentiel, toute particule élémentaire génère des champs d'origine électrique et des champs de nature gravitationnelle. Mettons ce fait en évidence.

13. La comparaison physique de deux telles quantités.

Dans un référentiel $\mathcal{R}$ muni d'un observateur S, on s'intéresse à deux particules élémentaires q et q' désignées par les charges électriques qu'elles portent, qui se trouvent à la date $\frac{\tau}{c}$ aux points de l'espace $q(\tau)$ et $q'(\tau)$. Le référentiel $\mathcal{R}'$ ayant pour support q est muni d'un observateur S', et en son sein la contrainte exercée par q sur q' est représentée par le vecteur force de Coulomb

$$\vec{F}'(q', \tau') = q'\vec{E}'$$

On souhaite déterminer la structure des champs associés à une quelconque distribution de charges et le principe de superposition indique que cette structure est celle des champs associés à une particule élémentaire isolée. On peut alors supposer que le vecteur force exprimé ci-dessus décrit la seule contrainte subie par q' dans $\mathcal{R}'$. Sous cette condition, $\vec{u}'$ étant le vecteur vitesse de q' dans $\mathcal{R}'$ et m étant sa masse inerte,

$$\gamma_{u'}\vec{F}' = mc^2 \ \frac{d^2}{d\sigma'^2}\varphi_{r'}(O_{s'}, q'(\tau')) \qquad \frac{d\sigma'}{d\tau'} = \gamma_{u'}^{-1}$$

Si $g = S \circ S'^{-1}$ et si $g_1(\tau', q'(\tau')) = \tau$, la contrainte correspondante dans $\mathcal{R}$ est déterminée par la relation

$$\gamma_u\vec{F} = mc^2 \ \frac{d^2}{d\sigma^2}\varphi_r(O_s, q'(\tau)) \qquad \frac{d\sigma}{d\tau} = \gamma_u^{-1}$$

On remarque que si $\vec{E}'$ était nul, $\vec{F}'$ ne pourrait l'être car une trajectoire immobile ou rectiligne et uniforme dans $\mathcal{R}'$ n'est pas une trajectoire similaire dans $\mathcal{R}$, et $\vec{F}$ serait proportionnelle à m et à un vecteur ne dépendant que de la trajectoire de q.

On peut noter $\chi_{q'}$ le temps propre de q' relatif à un certain observateur de son référentiel, $\chi_{q'}(\tau')$ et $\chi_{q'}(\tau)$ les dates correspondantes dans S' et dans S. $\mathcal{B}_s$ et $\mathcal{B}_{s'}$ étant représentées comme aux paragraphes précédents,

$$x_i(\tau) =< \vec{e}_i, \varphi_r(O_s, q'(\tau)) >_r \qquad x'_i(\tau') =< \vec{e}'_i, \varphi_{r'}(O_{s'}, q'(\tau')) >_{r'}$$

Il vient

$$\begin{aligned}
\frac{dx_i}{d\chi_{q'}} &= \left(\frac{\partial g_i}{\partial \tau'} + \frac{\partial g_i}{\partial x'_i}\frac{dx'_i}{d\tau'}\right)\frac{d\tau'}{d\chi_{q'}} \\
\frac{d^2x_i}{d\chi_{q'}^2} &= \left(\frac{\partial^2 g_i}{\partial \tau'^2} + \frac{\partial^2 g_i}{\partial x'_i \partial x'_j}\frac{dx'_i}{d\tau'}\frac{dx'_j}{d\tau'} + 2\frac{\partial^2 g_i}{\partial \tau' \partial x'_i}\frac{dx'_i}{d\tau'} + \frac{\partial g_i}{\partial x'_i}\frac{d^2x'_i}{d\tau'^2}\right)\frac{d\tau'}{d\chi_{q'}}\frac{d\tau'}{d\chi_{q'}} \\
&+ \left(\frac{\partial g_i}{\partial \tau'} + \frac{\partial g_i}{\partial x'_i}\frac{dx'_i}{d\tau'}\right)\frac{d^2\tau'^2}{d\chi_{q'}^2}
\end{aligned}$$

Sachant que $\frac{dx_i}{d\chi_{q'}} = \frac{dx_i}{d\sigma}\frac{d\sigma}{d\chi_{q'}}$, il est nécessaire d'avoir plus d'informations sur la fonction $\chi_{q'}$ pour pouvoir exprimer $\vec{F}$ en fonction de $\vec{F}'$.

10 Conclusion

La mécanique quantique provient en partie de la recherche des solutions stables pour la description des mouvements des électrons et des nucléons au sein d'un atome et ce document propose de nouvelles formules déterministes pour une étude classique de ce problème fondamental. On sait que les notions de longueur et de durée, qui se déduisent des concepts d'espace et de temps, assimilables à l'immobilité et la simultanéité, sont inhérentes à toute expérimentation des lois de la physique et il est intéressant de terminer par ces citations :

Albert Einstein dans une lettre adressée à Michele Angelo Besso le 25.12.1925 : « La chose la plus intéressante, livrée dernièrement par la théorie, est la théorie de Heisenberg-Born-Jordan des états quantiques. Un véritable calcul de sorcière où apparaissent des déterminants infinis (matrices) à la place des coordonnées cartésiennes. Cela est éminemment ingénieux et suffisamment protégé par une grande complexité, envers toute preuve de fausseté. »

Henri Poincaré dans son ouvrage La Science et l'Hypothèse publié en 1902 : « L'expérience est la source unique de la vérité (...) »

Références

[1] Albert Einstein. *Relativity : The Special and General Theory.* Methuen & Co Ltd, London, 1924.

[2] Henri Poincaré. *La Science et l'Hypothèse.* Flammarion, Paris, 1902.